

# Физика на ядрото и елементарните частици

---

- проф. дфзн Георги Райновски
  - кабинет Б442
  - приемно време: **вторник 11.00 - 12.00, сряда 11.00 - 12.00**
  - e-mail: [rig@phys.uni-sofia.bg](mailto:rig@phys.uni-sofia.bg), тел. 728
- 

## **Introductory Nuclear Physics**

*Kenneth S. Krane, John Wiley&Sons, Inc. New York, 1988.*

<http://nucleus.phys.uni-sofia.bg/riglectures/>

## **Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics**

*K. Heyde, IoP publishing, Bristol&Philadelphia, 2004*

## **Nuclear structure from a simple perspective**

*R.F. Casten, Oxford University Press, 2000*

## **Физика на атомните ситеми**

Петър Райчев, издателство ЛОДОС, София 2006

## **Физика на ядрото и елементарните частици**

*У.С.С. Уилямс, Университетско издателство "Св. Кл. Охридски", София 2000*

## **Увод в теоретичната ядрена физика**

*Б. Славов, Университетско издателство "Св. Кл. Охридски", София 2002, 1992*

## **Ядрена физика, А. Минкова, 2006**

**Изпит:** Крайна оценка =  $0.25 \cdot (\text{Тест 1}) + 0.25 \cdot (\text{Тест 2}) + 0.30 \cdot (\text{Задачи}) + 0.20 \cdot (\text{Въпрос})$

# От какво е изграден светът?

## Древна алхимия

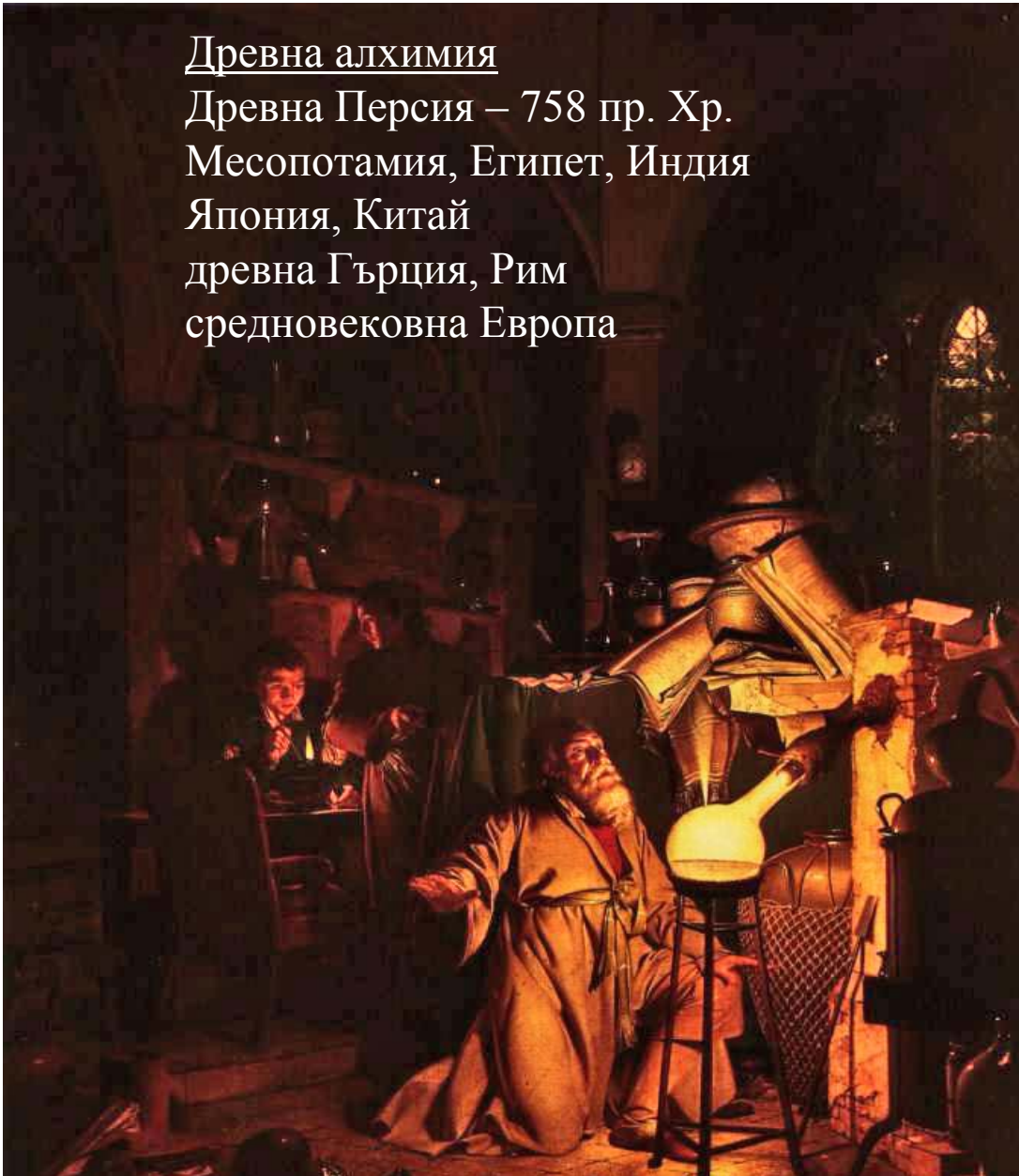
Древна Персия – 758 пр. Хр.

Месопотамия, Египет, Индия

Япония, Китай

древна Гърция, Рим

средновековна Европа

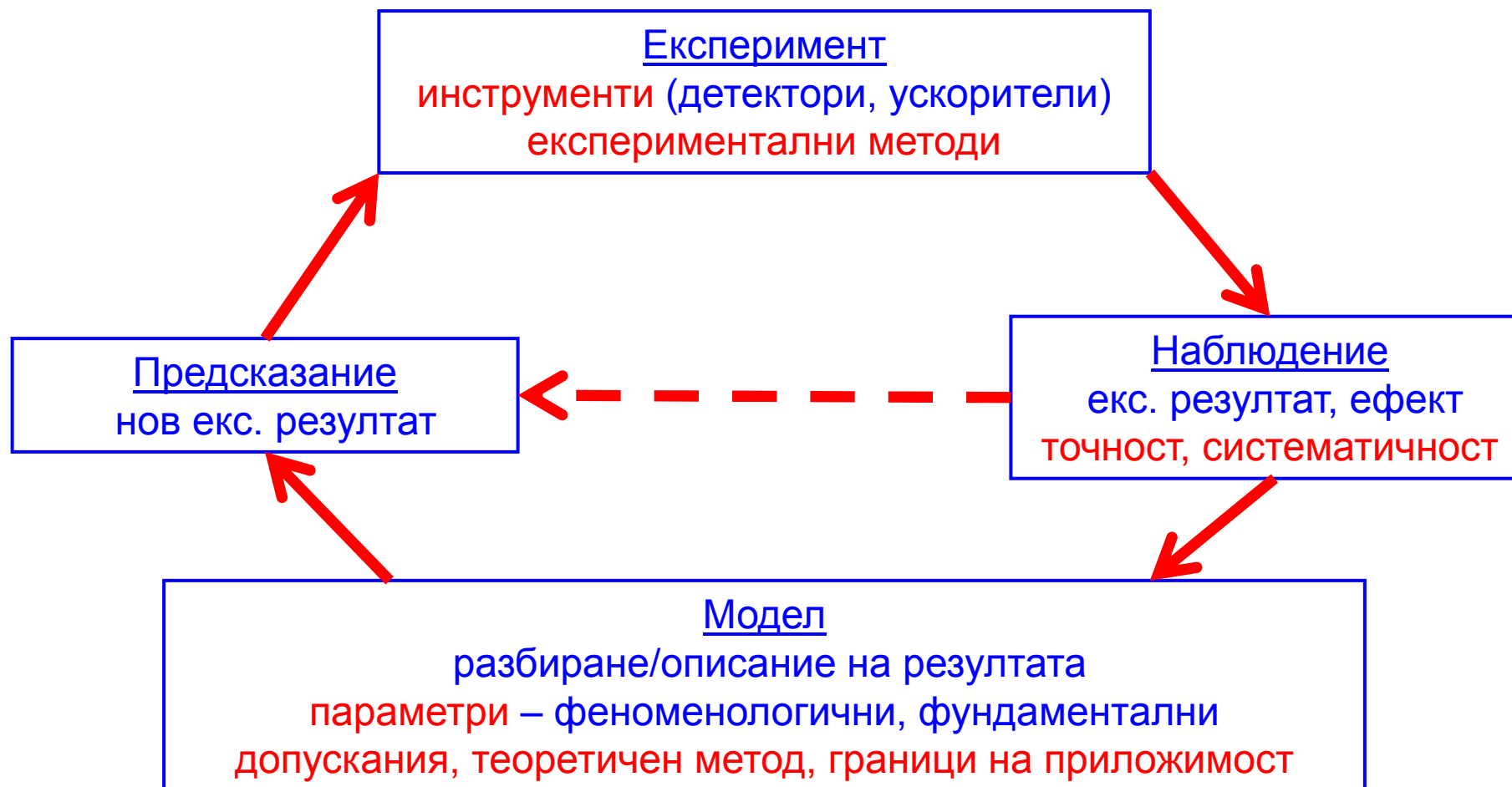


## Цели:

- да се изнамери метод за превръщането оловото в злато
- да се открие еликсира на вечната младост

**Защо оловото е по-разпространено от златото?**

# Научен метод



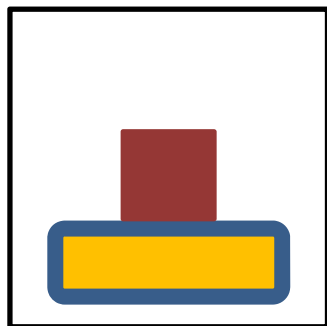
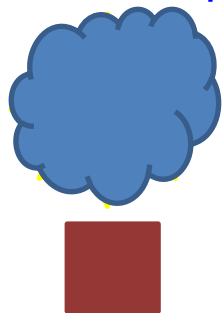
Модел описващ всички ефекти (наблюдавани или не)  $\equiv$  теория

Какво, как, защо меря (експериментатор) / описвам (теоретик)?

# По важни събития от историята на ядрената физика

- 1896 – Becquerel – открива радиоактивността;

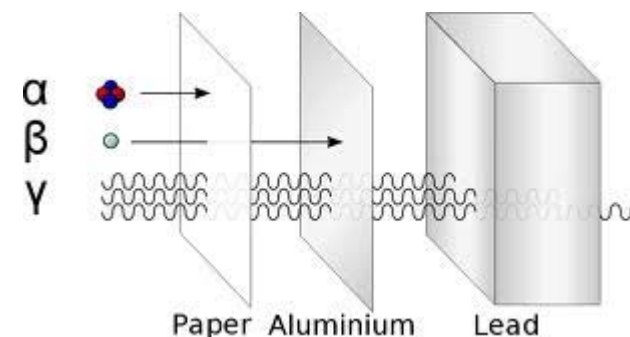
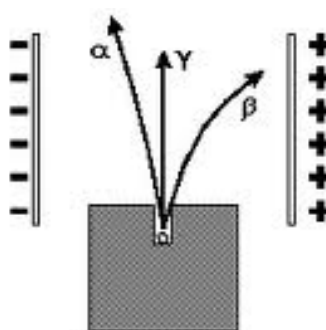
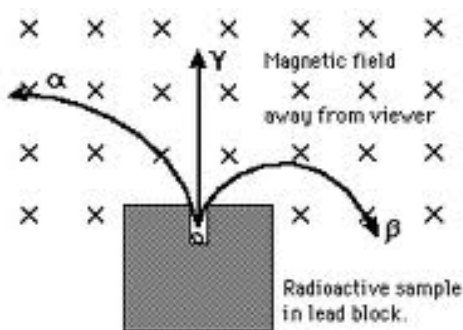
Има ли флуоресциращи материали, които излъчват X – лъчи?



Систематични измервания!

Нов тип лъчение  
спонтанна радиация

S.P. Thompson, Lord Kelvin



- 1898 – Marie and Pierre Curie – термина радиоактивност и изолират Ra и Po;

# По важни събития от историята на ядрената физика

- 1911 – Rutherford – открива атомното ядро

- 1917 – Rutherford, Madsen протона;



- 1919 – Rutherford – открива ядрените превръщания при ядрени реакции;

- 1919 – Aston – разработва първия мас спектрометър;

- 1925 – Goudsmit, Uhlenbeck – собствен спин;

- 1928 – Gamov, Gurney, Condon – теория на  $\alpha$ - разпада;

- 1930 – Pauli – неутринна хипотеза;

- 1931 – Van de Graaff – първи електростатичен ускорител;

- 1931 – Sloan, Lawrence – първи линеен ускорител;

- 1932 – Lawrence, Livingston – първи циклотрон;

- 1932 – Anderson – открива позитрона;

# По важни събития от историята на ядрената физика

- 1932 – Chadwick – открива нейтрона;



- 1932 – Cockcroft, Walton – ядрени реакции, чрез използване на ускорител;



- 1934 – I. Curie, F. Joliot – откриват изкуствената радиоактивност;



- 1934 – E. Fermi – теория на  $\beta$ -разпада;
- 1935 – Yukawa – мезонна хипотеза;
- 1935 – Bothe – предлага техниката на съвпадение;
- 1936 – N. Bohr – теория на съставното ядро;

# По важни събития от историята на ядрената физика

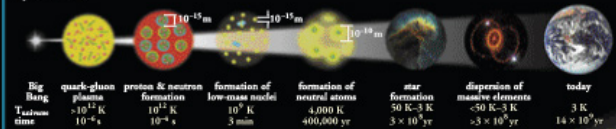
- 1938 – Hahn, Strassmann/Meitner, Frisch – откриват ядреното делене;
- 1938 – Bethe – ядреното сливане е енергетичния източник на звездите;
- 1939 – Borh, Wheeler – първи модел описващ ядреното делене;
- 1940 – McMillan, Seaborg – получават първия изкуствено създаден елемент;
- 1942 – E. Fermi – първи ядрен реактор;
- 1945 – първа ядрена бомба;
- 1946 – Gamow – Big Bang космология;
- 1946 – Bloch, Purcell – ядрено-магнитен резонанс;
- 1947 – Libby – радиоактивно датиране;
- 1949 – Mayer, Jensen, Haxel, Suess – слоест модел на атомното ядро;
- 1952 – първа термоядрена бомба;
- 1953 – A. Borh, B. Mottelson – колективен модел на атомното ядро;
- 1955 – Nilsson – деформиран слоест модел;

# Ядрена физика

## Nuclear Science

### Expansion of the Universe

After the Big Bang, the universe expanded and cooled. At about  $10^{-35}$  second, the universe consisted of a soup of quarks, gluons, electrons, and neutrinos. When the temperature of the Universe cooled to about  $10^{12}$  K, this soup condensed into protons, neutrons, and electrons. As time progressed, some of the protons and neutrons formed deuterium, helium, and lithium nuclei. Still later, electrons combined with protons and these low-mass nuclei to form neutral atoms. Due to gravity, clouds of atoms contracted into stars, where hydrogen and helium fused into more massive chemical elements. Exploding stars (supernovae) form the most massive elements and disperse them into space. Our earth was formed from supernova debris.

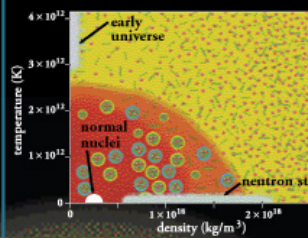


**Nuclear Science** is the study of the structure, properties, and interactions of the atomic nuclei. Nuclear scientists calculate and measure the masses, shapes, sizes, and decays of nuclei at rest and in collisions. They ask questions, such as: Why do nucleons stay in the nucleus? What combinations of protons and neutrons are possible? What happens when nuclei are compressed or rapidly rotated? What is the origin of the nuclei found on Earth?

**Legend**

- electron ( $e^-$ )
- proton
- neutron
- quark
- positron ( $e^+$ )
- neutrino ( $\nu$ )
- antineutrino ( $\bar{\nu}$ )
- gluon field
- gluon
- photon ( $\gamma$ )

**Mass Number:**  $A$   
**Atomic Number:**  $Z$   
**Neutron Number:**  $N = A - Z$

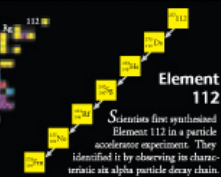


### Phases of Nuclear Matter

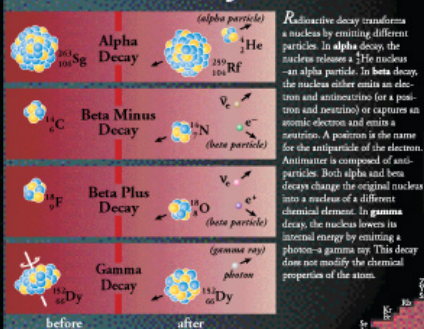
Nuclear matter can exist in several phases. When collisions excite nuclei, individual protons and neutrons may evaporate from the nuclear field. At sufficiently high temperatures or densities, a gas of nucleons (red background) forms. At even more extreme conditions, individual nucleons may cease to have meaningful identities, merging into the quark-gluon plasma (yellow background). Current data provide hints that physicists have glimpsed the quark-gluon plasma.

### Unstable Nuclei

Stable nuclei form a narrow white band on the Chart of the Nuclides. Scientists produce unstable nuclei far from this band and study their decays, thereby learning about the extremes of nuclear conditions. In its present form, this chart contains about 2500 different nuclides. Nuclear theory predicts that there are at least 4000 more to be discovered with  $Z \leq 112$ .



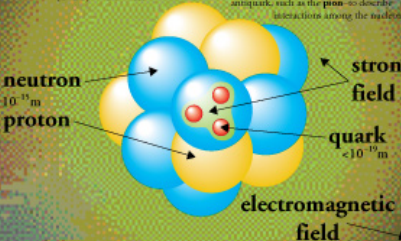
### Radioactivity



Radioactive decay transforms a nucleus by emitting different particles. In alpha decay, the nucleus releases a  $^4\text{He}$  nucleus—an alpha particle. In beta decay, the nucleus either emits an electron and antineutrino (for a positron) or captures an atomic electron and emits a neutrino. A positron is the name for the antiparticle of the electron. Antimatter is composed of antiparticles. Both alpha and beta decays change the original nucleus into a nucleus of a different chemical element. In gamma decay, the nucleus lowers its internal energy by emitting a photon—a gamma ray. This decay does not modify the chemical properties of the atom.

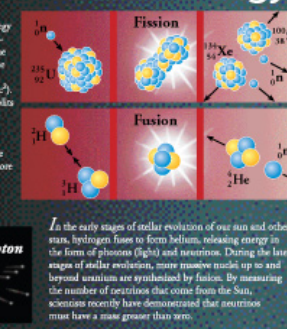
### The Nucleus

$(1-10) \times 10^{-15}$  m



In an atom, electrons orbit the nucleus at distances typically up to  $10^{-10}$  m, which is the nuclear diameter. If the electron cloud were shrunk to scale, the nucleus would cover a small area.

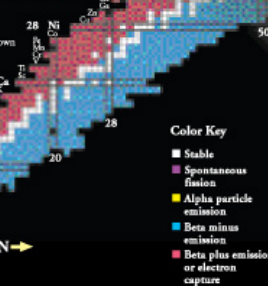
### Nuclear Energy



In the early stages of stellar evolution of our sun and other stars, hydrogen fuses to form helium, releasing energy in the form of photons (light) and neutrinos. During the later stages of stellar evolution, more massive nuclei up to and beyond uranium are synthesized by fusion. By measuring the number of reactions that come from the Sun, scientists recently have demonstrated that neutrinos must have a mass greater than zero.

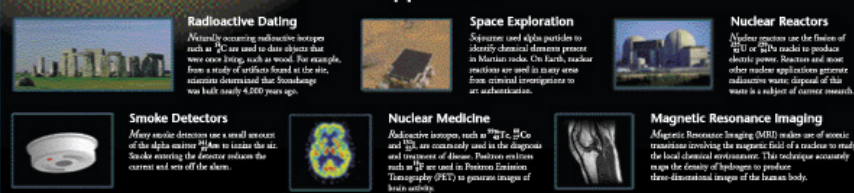
### Chart of the Nuclides

The Chart of the Nuclides presents in graphic form all known nuclei with atomic number,  $Z$ , and neutron number,  $N$ . Each nuclide is represented by a box colored according to its predominant decay mode. Magic numbers ( $N$  or  $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$  and  $126$ ) are indicated by a rectangle on the chart. They correspond to major closed shells and show regions of greater nuclear binding energy.



www.CPEPweb.org

### Applications

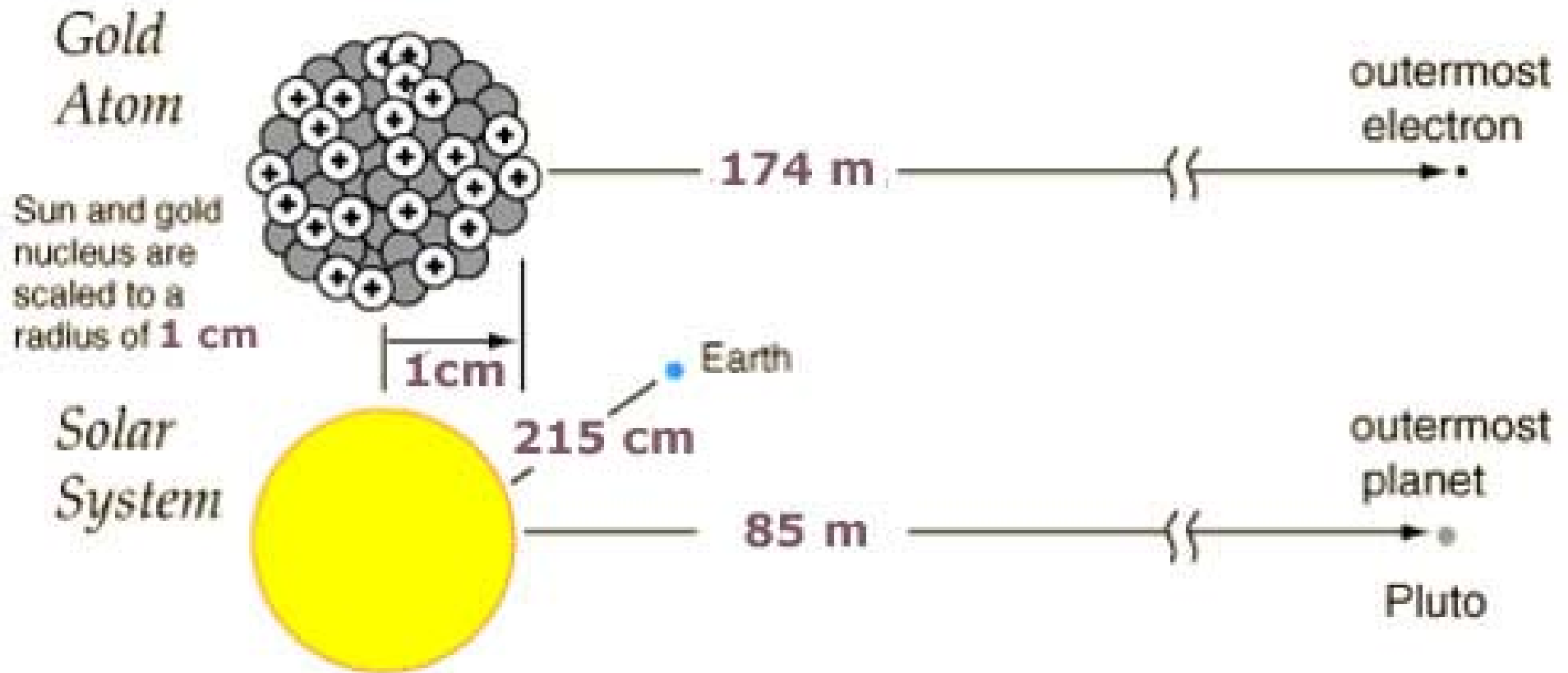


Astrophysical pictures courtesy NASA/JPL/Caltech and AURA/STScI.

© Copyright 2005 Contemporary Physics Education Project (CPEP) MS 5086008 LBNL Berkeley, CA 94720 USA. Support from U.S. Department of Energy, Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory – Nuclear Science Division, American Physical Society – Division of Nuclear Physics, J.M. Nienke Fund, U.S. National Science Foundation

# Основни термини, величини и размерности в ядрената физика.

# Скала на размерите в микросвета



Ако приемем че дължината на футболен стадион (~100 м) е равна на диаметъра на атома, то диаметъра на ядрото е колкото костилка от череша (~6 мм)

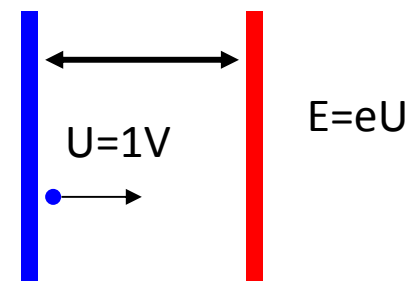
# Единици за енергия

SI prefixes

| $1000^m$      | $10^n$     | Prefix | Symbol | Since <sup>[1]</sup> | Short scale   | Long scale    | Decimal                           |
|---------------|------------|--------|--------|----------------------|---------------|---------------|-----------------------------------|
| $1000^8$      | $10^{24}$  | yotta- | Y      | 1991                 | Septillion    | Quadrillion   | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 |
| $1000^7$      | $10^{21}$  | zetta- | Z      | 1991                 | Sextillion    | Trilliard     | 1 000 000 000 000 000 000 000     |
| $1000^6$      | $10^{18}$  | exa-   | E      | 1975                 | Quintillion   | Trillion      | 1 000 000 000 000 000 000         |
| $1000^5$      | $10^{15}$  | peta-  | P      | 1975                 | Quadrillion   | Billiard      | 1 000 000 000 000 000             |
| $1000^4$      | $10^{12}$  | tera-  | T      | 1960                 | Trillion      | Billion       | 1 000 000 000 000                 |
| $1000^3$      | $10^9$     | giga-  | G      | 1960                 | Billion       | Milliard      | 1 000 000 000                     |
| $1000^2$      | $10^6$     | mega-  | M      | 1960                 | Million       |               | 1 000 000                         |
| $1000^1$      | $10^3$     | kilo-  | k      | 1795                 | Thousand      |               | 1 000                             |
| $1000^{2/3}$  | $10^2$     | hecto- | h      | 1795                 | Hundred       |               | 100                               |
| $1000^{1/3}$  | $10^1$     | deca-  | da     | 1795                 | Ten           |               | 10                                |
| $1000^0$      | $10^0$     | (none) | (none) | NA                   | One           |               | 1                                 |
| $1000^{-1/3}$ | $10^{-1}$  | deci-  | d      | 1795                 | Tenth         |               | 0.1                               |
| $1000^{-2/3}$ | $10^{-2}$  | centi- | c      | 1795                 | Hundredth     |               | 0.01                              |
| $1000^{-1}$   | $10^{-3}$  | milli- | m      | 1795                 | Thousandth    |               | 0.001                             |
| $1000^{-2}$   | $10^{-6}$  | micro- | $\mu$  | 1960 <sup>[2]</sup>  | Millionth     |               | 0.000 001                         |
| $1000^{-3}$   | $10^{-9}$  | nano-  | n      | 1960                 | Billionth     | Milliardth    | 0.000 000 001                     |
| $1000^{-4}$   | $10^{-12}$ | pico-  | p      | 1960                 | Trillionth    | Billionth     | 0.000 000 000 001                 |
| $1000^{-5}$   | $10^{-15}$ | femto- | f      | 1964                 | Quadrillionth | Billiardth    | 0.000 000 000 000 001             |
| $1000^{-6}$   | $10^{-18}$ | atto-  | a      | 1964                 | Quintillionth | Trillionth    | 0.000 000 000 000 000 001         |
| $1000^{-7}$   | $10^{-21}$ | zepto- | z      | 1991                 | Sextillionth  | Trilliardth   | 0.000 000 000 000 000 000 001     |
| $1000^{-8}$   | $10^{-24}$ | yocto- | y      | 1991                 | Septillionth  | Quadrillionth | 0.000 000 000 000 000 000 000 001 |

- Енергия;  $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$

Типичните  $\gamma$  и  $\beta$  разпадания са  $\sim 1 \text{ MeV}$



100 W ел. Крушка, за 1 час ще отдели:

$$E = P \cdot t = 100 \text{ W} (60 \times 60) \text{ s} = 360000 \text{ J}$$

$$= (3.6 \times 10^5 \text{ J}) / (1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 2.25 \times 10^{24} \text{ eV}$$

$$= 2.25 \text{ YeV}$$

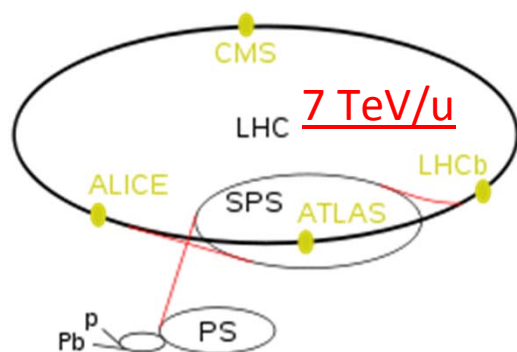
- Температурен еквивалент

$$\frac{1 \text{ eV}}{k_B} = \frac{1.60217653(14)10^{-19} \text{ J}}{1.3806505(24)10^{-23} \text{ J/K}}$$

$$= 11604.505(20) \text{ K} \propto 10^4 \text{ K}$$

# Единици за енергия

Large Hadron Collider  
протони до 7 TeV



$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol} / \text{g}$$

$$\#(\text{C}) = \frac{1 \text{ g}}{12} 6.022 \times 10^{23} \text{ mol} / \text{g} = 5 \times 10^{22}$$

$$\#(\text{p}) + \#(\text{n}) = (6 + 6) \times \#(\text{C}) = 5 \times 10^{23} \text{ u}$$

$$E / \text{нук} = 1.6 \times 10^{-9} \text{ eV} / \text{u}$$

Мравка тежаща 1 g се движи със скорост 5 cm/s

$$E = \frac{m v^2}{2} = \frac{(10^{-3} \text{ kg}) (5 \times 10^{-2} \text{ m} / \text{s})^2}{2} = 1.25 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$= \frac{1.25 \times 10^{-6} \text{ J}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ J} / \text{eV}} = 0.78 \times 10^{13} \text{ eV} = 7.8 \text{ TeV}$$

Колко нуклеона има в една мравка (от C)?

- 210 MeV – средната енергия отделяна при деленето едно ядро  $^{239}\text{Pu}$
- 200 MeV – средната енергия отделяна при деленето едно ядро  $^{235}\text{U}$

Троїлов еквивалент:  $\mu\text{t}(\text{gTNT})$ ,  $\text{mt}(\text{kgTNT})$ ,  $\text{t}(\text{tTNT})$ ,  $\text{kt}(\text{ktTNT})$

$$1 \text{ gram TNT} = 4184 \text{ J}$$

- 13.6 eV – йонизационната енергия на водорода
- 1/40 eV – топлината енергия при стайна температура

# Единици за енергия

Температурен ефект на освободената при разпад енергия



Колко грама  $^{238}\text{U}$  са необходими за да се загрее даденото количество вода до  $100^{\circ}\text{C}$ ? Каква е плътността на отделяната топлинна енергия за единица време?

$$Q = \Delta T c(\text{H}_2\text{O}) m(\text{H}_2\text{O}) \quad c(\text{H}_2\text{O}) = 4.1855 \text{ J/gK} \quad Q = 6.7 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta T = (100 - 20)^{\circ} \text{ C} \quad E_{\alpha} = 4 \text{ MeV} = 4 \times 1.6 \times 10^{-13} \text{ J} = 6.4 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\frac{Q}{E_{\alpha}} = \frac{6.7 \times 10^4}{6.4 \times 10^{-13}} = 10^{17} \alpha' \text{s} \rightarrow 10^{17} \text{ } ^{238}\text{U} \quad \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A} \quad m = \frac{10^{17}}{6.022 \times 10^{23}} 238 = 40 \times 10^{-6} \text{ g} = 40 \text{ } \mu\text{g}$$

$$1\text{kg H}_2\text{O} \rightarrow 200 \text{ } \mu\text{g } ^{238}\text{U}$$

$$1\text{t H}_2\text{O} \rightarrow 200 \text{ mg } ^{238}\text{U}$$

$$5\text{t H}_2\text{O} \rightarrow 1 \text{ g } ^{238}\text{U}$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$T_{1/2}(^{238}\text{U}) = 4.468 \times 10^9 \text{ y}$$

$$\lambda(^{238}\text{U}) = 1.5 \times 10^{-8} \text{ y}^{-1}$$

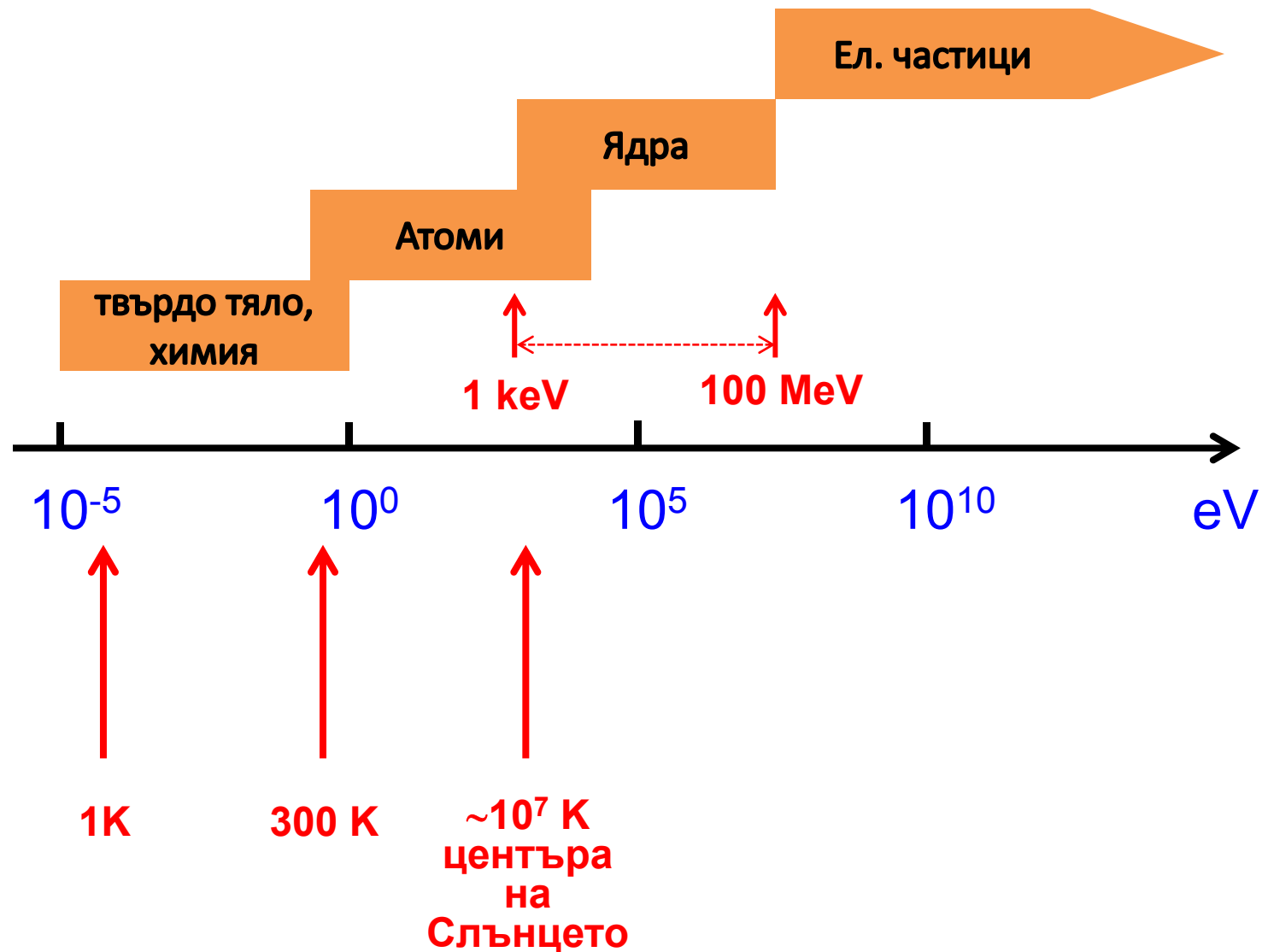
$$A = \lambda N = 1.5 \times 10^{-8} \text{ y}^{-1} 10^{17} = 1.5 \times 10^9 \text{ r/y}$$

$$\rightarrow 6 \times 10^9 \text{ MeV/y} \approx 1 \times 10^{-3} \text{ J/y}$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

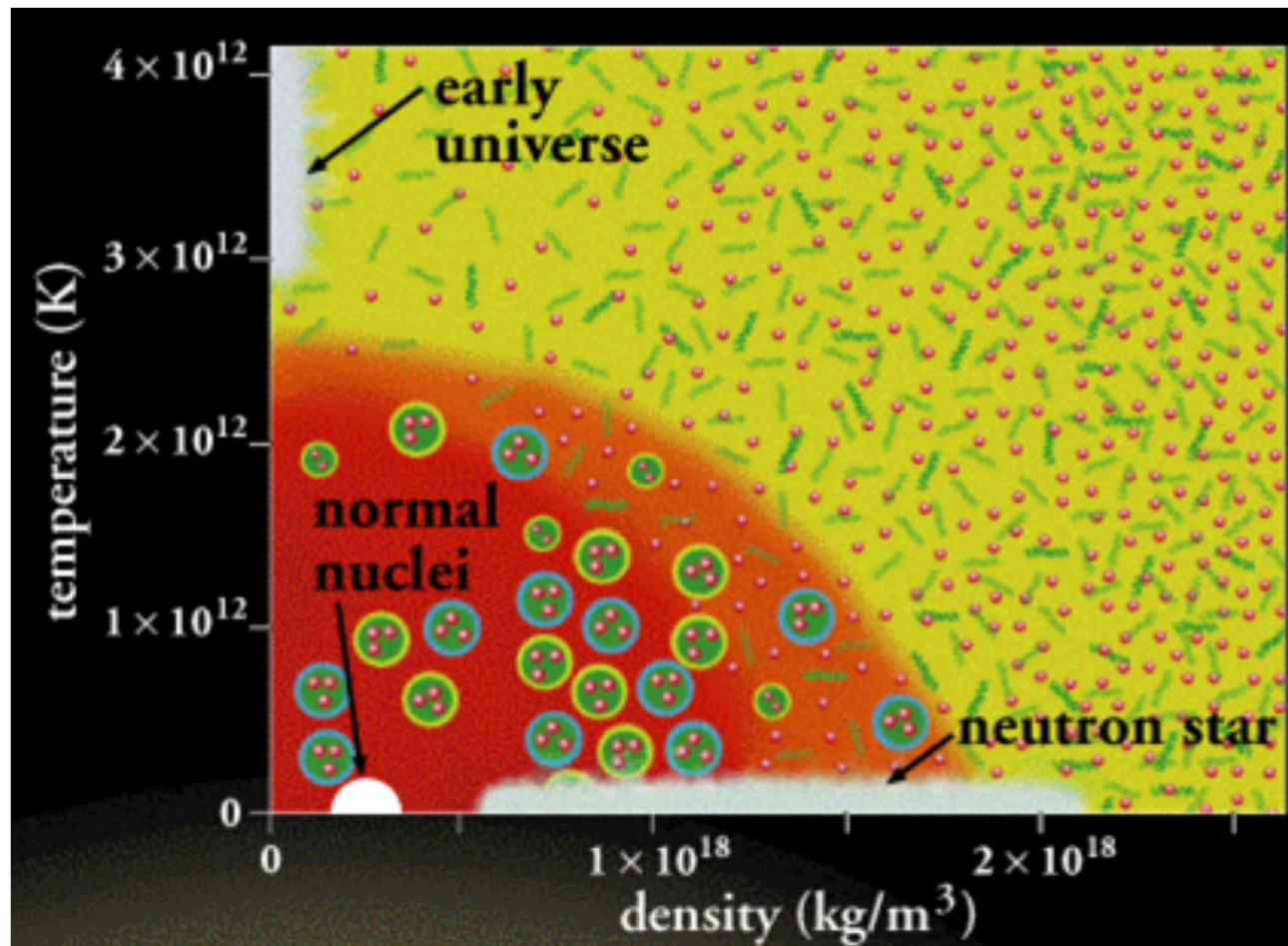
$$t = 6.7 \times 10^7 \text{ y}$$

# Енергетична скала в ядрената физика



# Плътност на ядрената материя

$$\rho = \frac{M_N}{\frac{4\pi}{3} R_N^3} = \frac{Am_n}{\frac{4\pi}{3} (1.2\text{fm } A^{1/3})^3} = \frac{m_n}{7.2\text{fm}^3} = \frac{1.66 \times 10^{-27} \text{kg}}{7.2 \times 10^{-45} \text{m}^3} = 2.3 \times 10^{17} \text{kg/m}^3$$



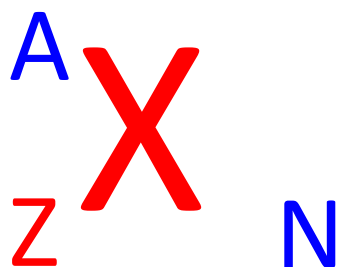
# Основни означения

1932 - Chadwick – открива нейтрона – **електрически неутрална частица** с маса

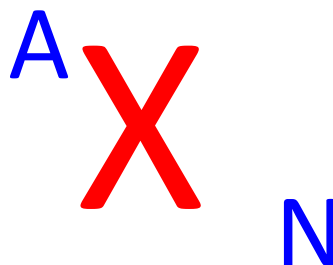
$$m_n \approx m_p \quad (m_p = 938.272 \text{ MeV}, m_n = 939.566 \text{ MeV}, \Delta m = 1.293 \text{ MeV})$$

{**протон**, **нейтрон**}  $\equiv$  **нуклеон**

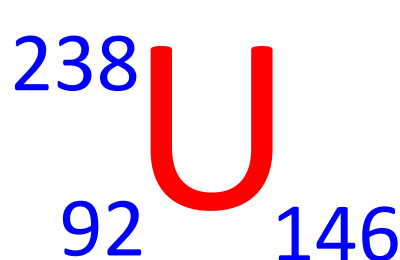
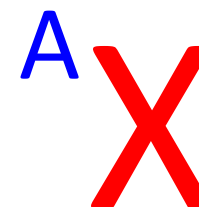
$$\text{ЯДРО} \equiv Z, N, A = N + Z$$



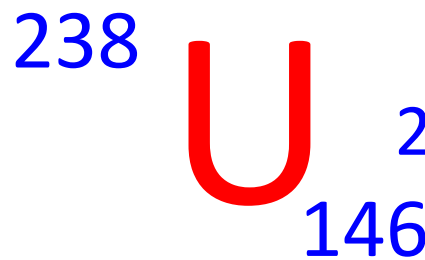
$$X \equiv Z$$



$$A = N + Z$$



$$U \equiv 92$$



$$238 = 146 + 92$$



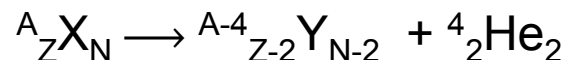
**Z** – константа – **ИЗОТОПИ** ( $^{112}\text{Sn}$ ,  $^{114}\text{Sn}$ ,  $^{115}\text{Sn}$ ,  $^{116}\text{Sn}$ ,  $^{118}\text{Sn}$ ,  $^{120}\text{Sn}$ )

**N** – константа – **ИЗОТОНИ** ( $^{132}\text{Te}$ ,  $^{134}\text{Xe}$ ,  $^{136}\text{Ba}$ ,  $^{138}\text{Ce}$ )

# Основни свойства на ядрата

- маса – измерва се в обобщени атомни маси (относителна единица):  
 $m(^{12}\text{C}) = 12\text{u} \Rightarrow 1\text{u} = 931.502 \text{ MeV}$  ;
- радиус – типичните разстояния в ядрото  $\propto 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$  (1 Fermi);
- относително разпространение на изотопите (за стабилните нуклиди);
- канали на разпад и времена на полуразпад (за радиоактивните нуклиди):

➤  $\alpha$  разпад -



$E_\alpha \approx 5 \text{ MeV}$ ,  $T_{1/2} \approx \text{min} \div \mu\text{s}$ , но

$$T_{1/2}(^{238}\text{U}) = 4.46 \times 10^9 \text{ y}, T_{1/2}(^{232}\text{Th}) = 1.4 \times 10^{10} \text{ y}$$

➤  $\beta$  разпад -  ${}^A_Z\text{X}_N \longrightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y}_{N-1} + e^- + \tilde{\nu}_e$   $\beta$  - минус  ${}^{140}_{54}\text{Xe}_{86} \longrightarrow {}^{140}_{55}\text{Cs}_{85} + e^- + \tilde{\nu}_e$



$E_\beta \leq 1 \text{ MeV}$ ,  $T_{1/2} \approx \text{ms} \div \text{days}$ ,

# Основни свойства на ядрата

- $\gamma$  разпад - електромагнитно лъчение

$$E_{\gamma} \approx 0.05 \div 20 \text{ MeV}, T_{1/2} \approx \text{ns} \div \text{fs}, \text{ но}$$

съществуват и така наречените ядрени изомери:

$$T_{1/2}({}^{99}\text{Tc}) = 6.02 \text{ h}, T_{1/2}({}^{95}\text{Tc}) = 61 \text{ days}$$

$$T_{1/2}({}^{180}\text{Ta}) = 1.2 \times 10^{15} \text{ y}, T_{1/2}({}^{178}\text{Hf}) = 31 \text{ y}$$

$\alpha$  разпад  
**силно ядрено  
взаимодействие**

$\beta$  разпад  
**слабо ядрено  
взаимодействие**

$\gamma$  разпад  
**електромагнитно  
взаимодействие**

- спонтанно делене -  ${}^A\text{X} \longrightarrow {}^{A_1}\text{Y} + {}^{A_2}\text{Z} + \text{Nn}, A > 230$
- редки разпади - с излъчване на един, два протона ( ${}^{113}\text{Cs} \longrightarrow {}^{112}\text{Xe} + \text{p}$ ),  
неутрон ( ${}^{13}\text{Be} \longrightarrow {}^{12}\text{Be} + \text{n}$ ), ядрени кълъстери  ${}^8\text{Be}, {}^{12}\text{C}, {}^{16}\text{O}$  ( ${}^{114}\text{Ba} \longrightarrow {}^{102}\text{Sn} + {}^{12}\text{C}$ );

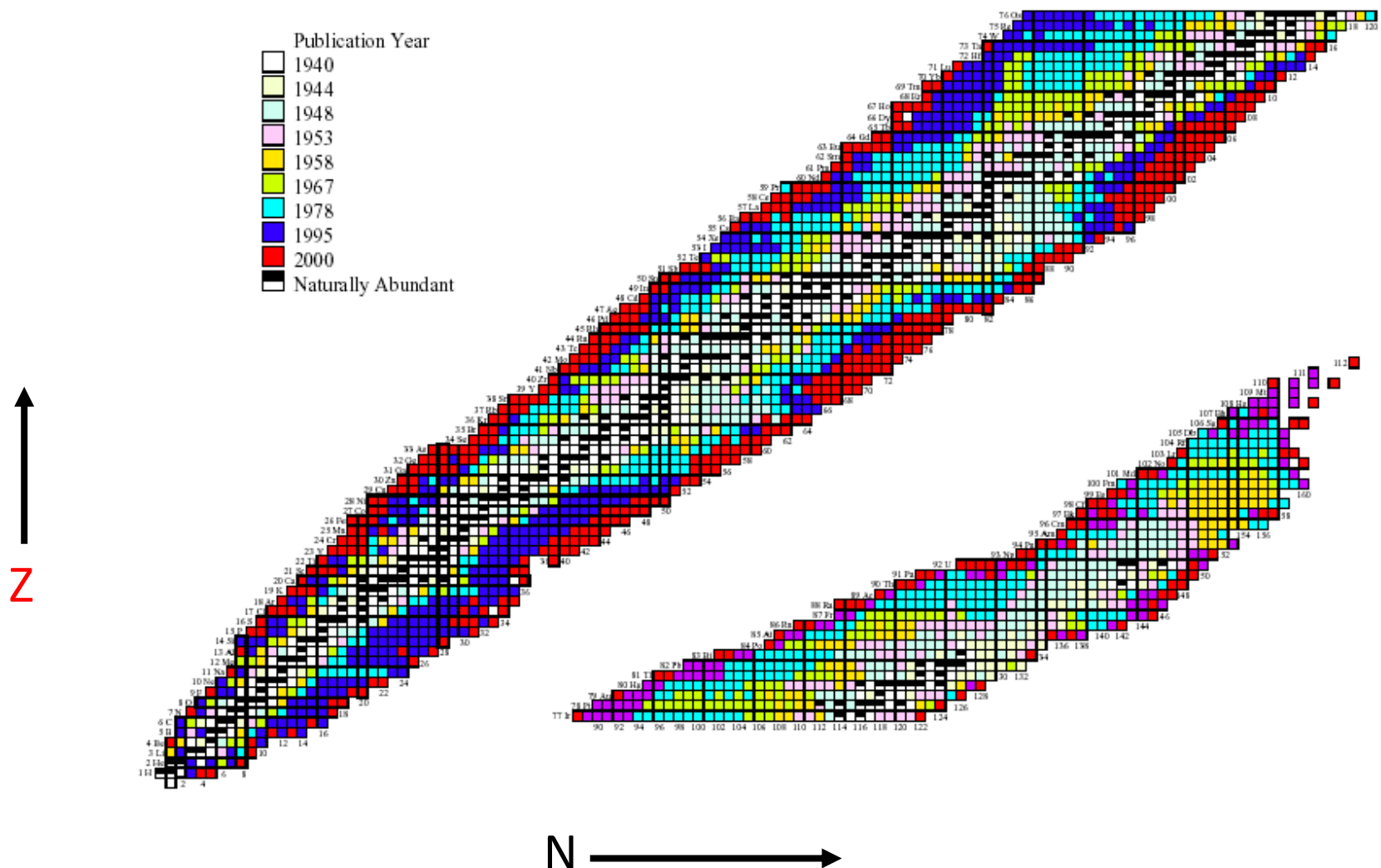
- възможни реакции и сечения за тях
- възбудени състояния – енергия на възбуждане, спин, вероятности за електромагнитни преходи между тях, мултиполни моменти;

# Фундаментални взаимодействия

| Взаимодействие  | Проявление                                               | Сила                | Обсег                      | Преносител                                                          |
|-----------------|----------------------------------------------------------|---------------------|----------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Силно ядрено    | Свързва<br>протоните и<br>неутроните в<br>ядро           | 1                   | $10^{-15}$ m               | глюони<br>$m=0$<br>$spin=1$                                         |
| Електромагнитно | Обуславя<br>взаимодействиет<br>о м/у заредени<br>частици | 1/137               | $\infty$                   | Фотон<br>$m = 0$<br>$spin = 1$                                      |
| Слабо ядрено    | $\beta$ -разпад                                          | $10^{-6}$           | $10^{-18}$ m<br>(0.1%D(p)) | Векторни<br>бозони<br>$W^+, W^-, Z^0$<br>$m > 80$ GeV<br>$spin = 1$ |
| Гравитация      | Обуславя<br>взаимодействиет<br>о м/у масови<br>обекти    | $6 \times 10^{-34}$ | $\infty$                   | гравитон(??)<br>$m_g < 1.2 \times 10^{-22}$ eV<br>$spin = 2$        |

# Карта на нуклидите

Evolution of the *Table of Isotopes*



# Елементи на квантовата механика. Примери.

# Вълнова функция и вероятността интерпретация

1) Движението на квантова частица се описва с вълнова функция  $\Psi(\vec{r}, t)$ ;

2) Вероятността за откриване на квантовата частица, която се описва от  $\Psi(\vec{r}, t)$  в момент  $t$ , в елементарен обем  $d^3r$  около точка  $\vec{r}$ , се дава от квадрата на модула на вълнова функция:

$$P(\vec{r}, t)d^3r = \Psi(\vec{r}, t)^* \Psi(\vec{r}, t)d^3r$$

3) Вълновата функция  $\Psi(\vec{r}, t)$  може да се представи като сума от вълни  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots$ , всяка от които описва определено състояние на движението:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i C_i \Psi_i$$

$|C_i|^2$  - вероятност частицата да бъде открита във състояние на движение, описвано от  $\Psi_i$

# Съотношения за неопределеност на Хайзенберг

Какво е положението на частица с маса  $m$  и импулс  $\vec{p}$  ако я разглеждаме като вълна?

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - E \cdot t)} \quad P(r, t) d^3 r = |Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - E \cdot t)}|^2 d^3 r = |A|^2 d^3 r$$

Не зависи от  $\vec{r} \Rightarrow$  всички точки в пространството са **равновероятни!**

Какъв е импулсът  $\vec{p}$  на частица с маса  $m$ , локализирана в точка, ако я разглеждаме като вълна?

Безсмислен въпрос!  $\lambda = h / p$  Каква е дължината на вълната в точка?!

**Едновременното познаване на  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$  за квантовите системи е невъзможно – точното измерване на една от тези величини внася неопределеност в другата!**

Съотношения за неопределеност на Хайзенберг:

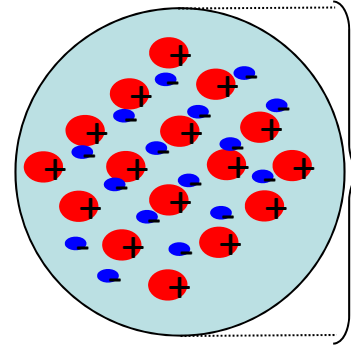
$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2 \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar / 2 \quad \Delta l_z \Delta \varphi \geq \hbar / 2$$

$$\begin{array}{ccc} |\Psi(\vec{r})| \neq 0, \Psi(\vec{r}) \neq 0 & \Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k & A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r \\ \Delta x, \Delta y, \Delta z & |A(\vec{k})|^2 & \Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z \end{array}$$

# Модел на Томпсън

- заряд –  $Ze$  – “ $Z$ ” атомен номер,  $e=6.241\ 509\ 629\ 152\ 65 \times 10^{18}$  C
- масово число –  $A$  –  $m_p \cong 2000 m_e$ ,  $A > 2Z$

$A$  протони и  $(A-Z)$  ядрени електрони  
 Маса  $\cong A.m_p$       Заряд  $\cong +Z.e$



$$\Delta x \approx 10^{-14} m \Rightarrow \Delta p \approx \hbar / \Delta x$$

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

$$\Delta p \approx 6.58 \times 10^{-8} \text{ MeV s/m} = 20 \text{ MeV/c}$$

## Проблеми:

- изисква взаимодействие м/у електрони и протони, което да е по силно от **кулоновото**, но няма експериментална индикация за съществуването на подобно;
- предполага наличието на разпадни електрони с **енергия 20 MeV** – никога не са наблюдавани такива;
- предсказва **неправилно спина на ядрата с нечетно  $A-Z$** ; Пример: деутрон  ${}^2\text{H}$ ,  $A=2 \Rightarrow$  има 2 протона и 1 ядрен електрон  $\Rightarrow$  възможни спинове 1/2 или 3/2 докато експериментално установения спин е 1;
- предсказва **неправилно магнитния диполен момент** - за ядра с не сдвоени електрони той ще бъде  $\propto \mu_B = e\hbar/2m_e = 9.27 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$ , но експериментално е известно, че ядрения магнитен диполен момент е  $\propto \mu_N = e\hbar/2m_p = 5.05 \times 10^{-27} \text{ JT}^{-1}$ , т.е 2000 пъти по-малък;

4) Вълновата функция  $\Psi(\vec{r}, t)$  се определя от уравнението на Шродингер;

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - E \cdot t)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \Psi$$

$$-i\hbar \nabla \Psi = \vec{p} \Psi$$

$$(-i\hbar \nabla) \Psi = (\vec{p}) \Psi$$

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = \frac{(\vec{p})^2}{2m} \Psi$$

$$- \hbar^2 \nabla^2 \Psi = (\vec{p})^2 \Psi$$

$$E = \frac{(\vec{p})^2}{2m}$$

$$E = \frac{(\vec{p})^2}{2m} + U(\vec{r})$$

$$E = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{(\vec{p})^2}{2m} = - \frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \equiv \hat{H}(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad \vec{r} \rightarrow \vec{r}$$

5) На всяка физична величина се съпоставя линеен ермитов оператор. Стойностите, които физичните величини могат вземат, са собствените стойности на съответните им оператори. Между тези операторите съществуват същите съотношения и тъждества, както м/у физическите величини в класическата механика.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \hat{\vec{L}} = -i\hbar \hat{\vec{r}} \times \nabla$$

$$\{q_i, p_k\} = \delta_{ik} \quad [\hat{r}_i, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{ik}$$

Ако два оператора комутират, те имат обща система от собствени вектори!

Съотношения за неопределеност на Хайзенберг:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hbar \hat{C}$$

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} |\hat{C}|$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

# Едномерен случай

Нерелативистично приближение → уравнение на Шродингер – частица с маса  $m$  в потенциал  $V(x)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x, t) \equiv \hat{H} \Psi(x, t)$$

$$\Psi(x, t) = \psi(x) T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\psi} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) \right] = \frac{i\hbar \frac{d}{dt} T(t)}{T(t)} = E$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad H \psi(x) = E \psi(x)$$

задача за собствени вектори  $\{\psi_n(x)\}$  и стойности  $\{E_n\}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} T(t) = E T(t) \quad T(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

от граничните условия  $\Rightarrow$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\psi(a + \epsilon) - \psi(a - \epsilon)] = 0$$

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{iEt/\hbar} = \sum_n c_n \psi(x)_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{d\psi(x)}{dx} \right)_{x=a+\epsilon} - \left( \frac{d\psi(x)}{dx} \right)_{x=a-\epsilon} \right] = 0$$

$$P(x, t) dx = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \quad P(x_1, x_2, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = 1 \quad \langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) f \Psi(x, t) dx$$

# Свободна частица $V(x)=0$

$$\frac{d}{dx^2} \psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, k^2 = 2mE / \hbar^2$$

$$\psi(x) = A' \sin(kx) + B' \cos(kx)$$

$$\psi(x) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)} \quad \text{Уравнение на непрекъснатост} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\vec{r})\psi$$

$\psi^*$

$$i\hbar(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi^* + V(\vec{r})\psi^*$$

$\psi$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = \frac{i\hbar}{2m} \text{div}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

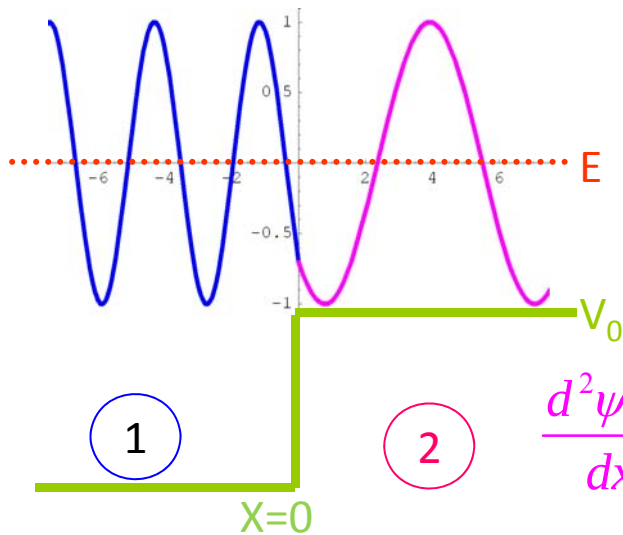
$$j = \frac{\hbar}{i2m} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x})$$

## Нормиране

приемаме, че в  $x=-\infty$  имаме източник на частици с интензитет  $I$  (p/s)  $\Rightarrow B=0$

$$j = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad A = \sqrt{mI / \hbar k}$$

# Стъпков потенциал, $E > V_0$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = A.e^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x}$$

$$k_1 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

$$\psi_2(x) = C.e^{ik_2x} + D.e^{-ik_2x}$$

$$k_2 = \sqrt{2m(E - V_0) / \hbar^2}$$

$$A + B = C + D$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\psi(a + \epsilon) - \psi(a - \epsilon)] = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{d\psi(x)}{dx} \right)_{x=a+\epsilon} - \left( \frac{d\psi(x)}{dx} \right)_{x=a-\epsilon} \right] = 0 \quad k_1(A - B) = k_2(C - D)$$

“A” – падаща вълна “B” – отразена вълна “C” – преминала вълна  $D=0$

$$B = A \frac{1 - k_2 / k_1}{1 + k_2 / k_1}$$

$$C = A \frac{2}{1 + k_2 / k_1}$$

Коефициент на отражение

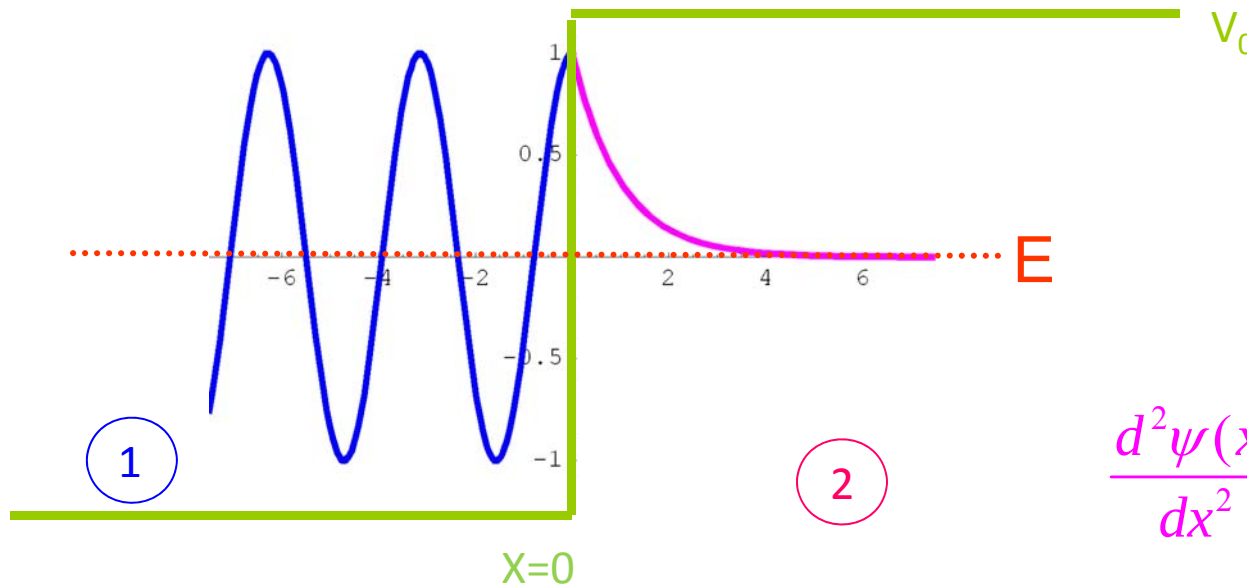
$$R = \frac{j_{ref}}{j_{incid}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left( \frac{1 - k_2 / k_1}{1 + k_2 / k_1} \right)^2$$

Коефициент на преминаване

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{incid}} = \frac{k_2 |C|^2}{k_1 |A|^2} = \frac{4k_2 / k_1}{(1 + k_2 / k_1)^2}$$

$$R + T = 1$$

# Стъпков потенциал, $E < V_0$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

$$\psi_1(x) = A.e^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x}$$

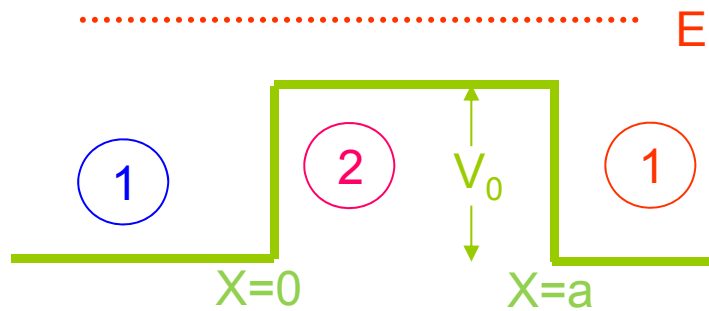
$$k_1 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

$$\psi_2(x) = C.e^{k_2x} + D.e^{-k_2x}$$

$$k_1 = \sqrt{2m(V_0 - E) / \hbar^2}$$

$$\psi_2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \text{const} \implies C = 0$$

# Правоъгълна бариера, $E > V_0$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = A.e^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x) = C.e^{ik_2x} + D.e^{-ik_2x}$$

$$\psi_3(x) = F.e^{ik_2x}$$

$$k_1 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

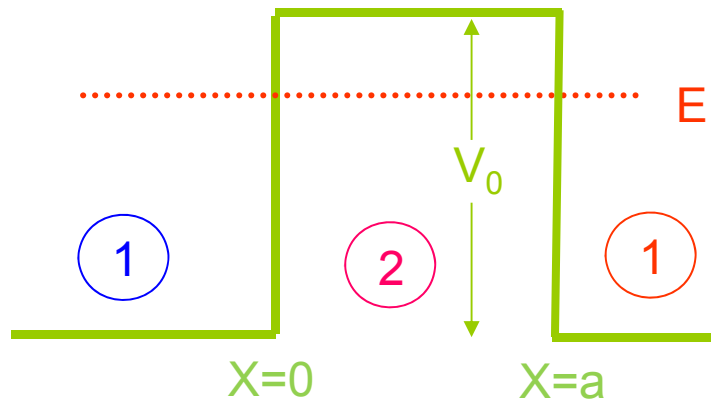
$$k_2 = \sqrt{2m(E - V_0) / \hbar^2}$$

$$k_3 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{incid}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{E(E - V_0)} \sin^2(k_2 a)}$$

коэффициент на преминаване

# Правоъгълна бариера, $E < V_0$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = A.e^{ik_1x} + B.e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x) = C.e^{k_2x} + D.e^{-k_2x}$$

$$\psi_3(x) = F.e^{ik_2x}$$

$$k_1 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

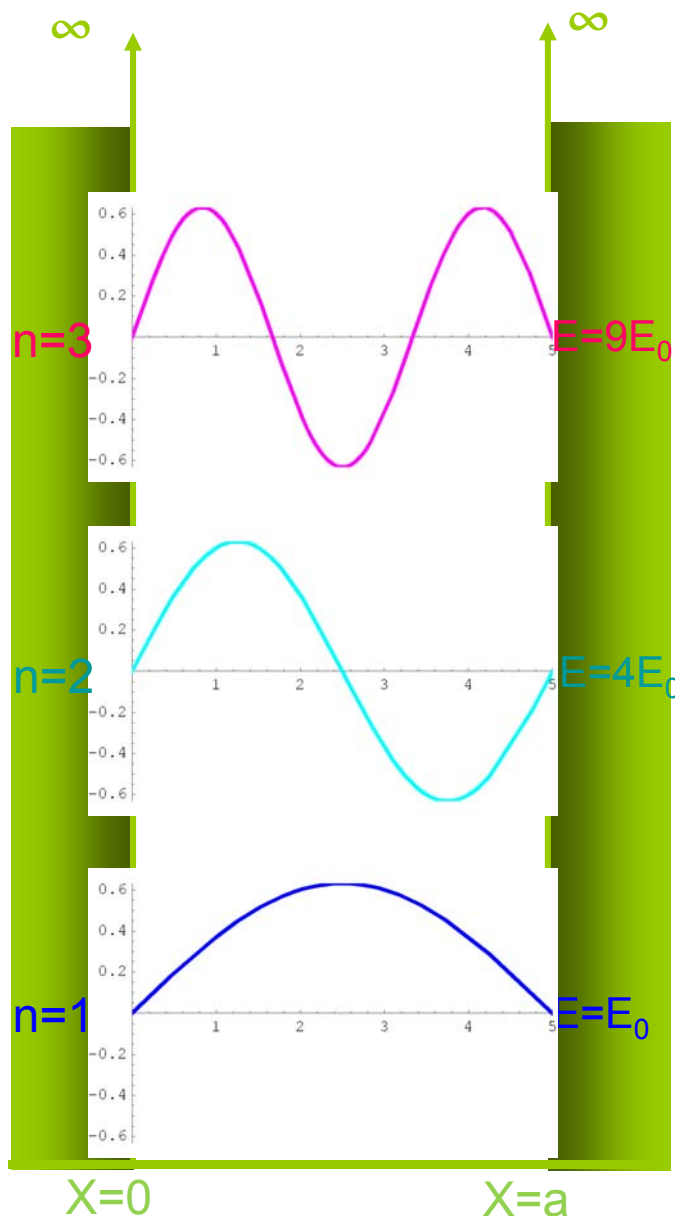
$$k_2 = \sqrt{2m(V_0 - E) / \hbar^2}$$

$$k_3 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{incid}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)} \sinh^2(k_2 a)}$$

коэффициент на тунелиране

# Безкрайна потенциална яма



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, x > a \\ 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$\psi = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad k = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

Гранични условия:

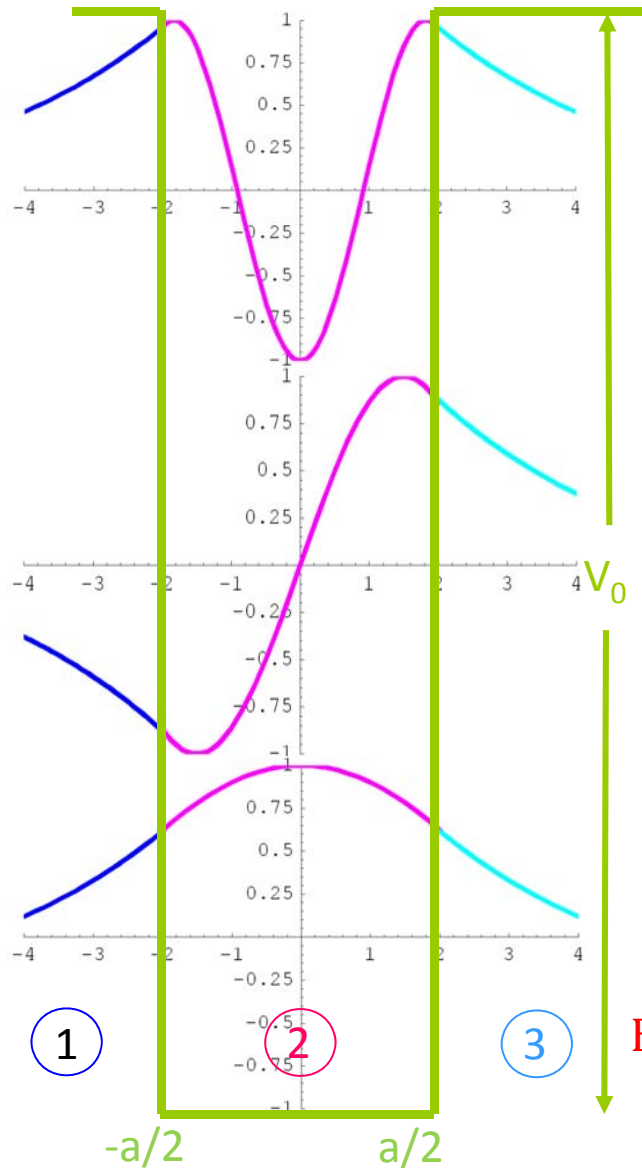
$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 \\ \psi(a) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} B &= 0 \\ ka &= n\pi \quad n = \textcircled{1}, 2, \dots \end{aligned} \Rightarrow$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

$$A^2 \int_0^a \left( \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right)^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

# Крайна потенциална яма



$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| > a/2 \\ 0 & |x| < a/2 \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = A.e^{k_1 x} \quad k_1 = \sqrt{2m(V_0 - E) / \hbar^2}$$

$$\psi_3(x) = G.e^{-k_1 x}$$

$$\psi_2(x) = C.e^{ik_2 x} + D.e^{-ik_2 x} \quad k_2 = \sqrt{2mE / \hbar^2}$$

Гранични условия:

$$k_2 \tan(k_2 a / 2) = k_1 \quad P^2 = ma^2 V_0 / 2\hbar^2 \quad \alpha \cdot \tan(\alpha) = \sqrt{P^2 - \alpha^2}$$

$$-k_2 \cot(k_2 a / 2) = k_1 \quad \alpha = k_2 a / 2$$

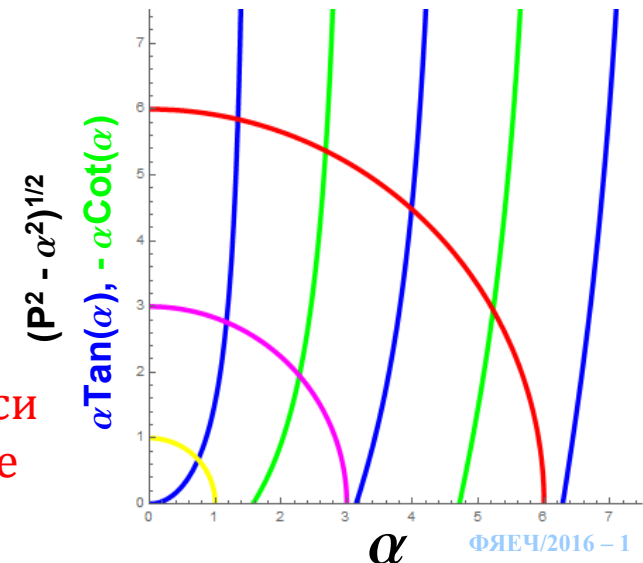
$$-\alpha \cdot \cot(\alpha) = \sqrt{P^2 - \alpha^2}$$

$0 < P < \frac{\pi}{2}$  едно решение

$\frac{\pi}{2} < P < \pi$  две решения

.....

Броя свързани решения зависи от само от характеристиките на потенциала.



# Хармоничен осцилатор

$$V(x) = V(x_0) + \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi = 0$$

$$\xi = x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\psi'' + \left( \frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2 \right) \psi = 0$$

## Асимптотично решение

$$\xi^2 \gg 2E / \hbar\omega \quad \psi'' = \xi^2 \psi_a \quad \psi_a \approx e^{-\xi^2/2}$$

## Пълно решение

$$\psi = e^{-\xi^2/2} \chi(\xi) \quad \chi'' - 2\xi\chi' + \left( \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) \chi = 0$$

$$\chi'' - 2\xi\chi' + 2n\chi = 0 \quad E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

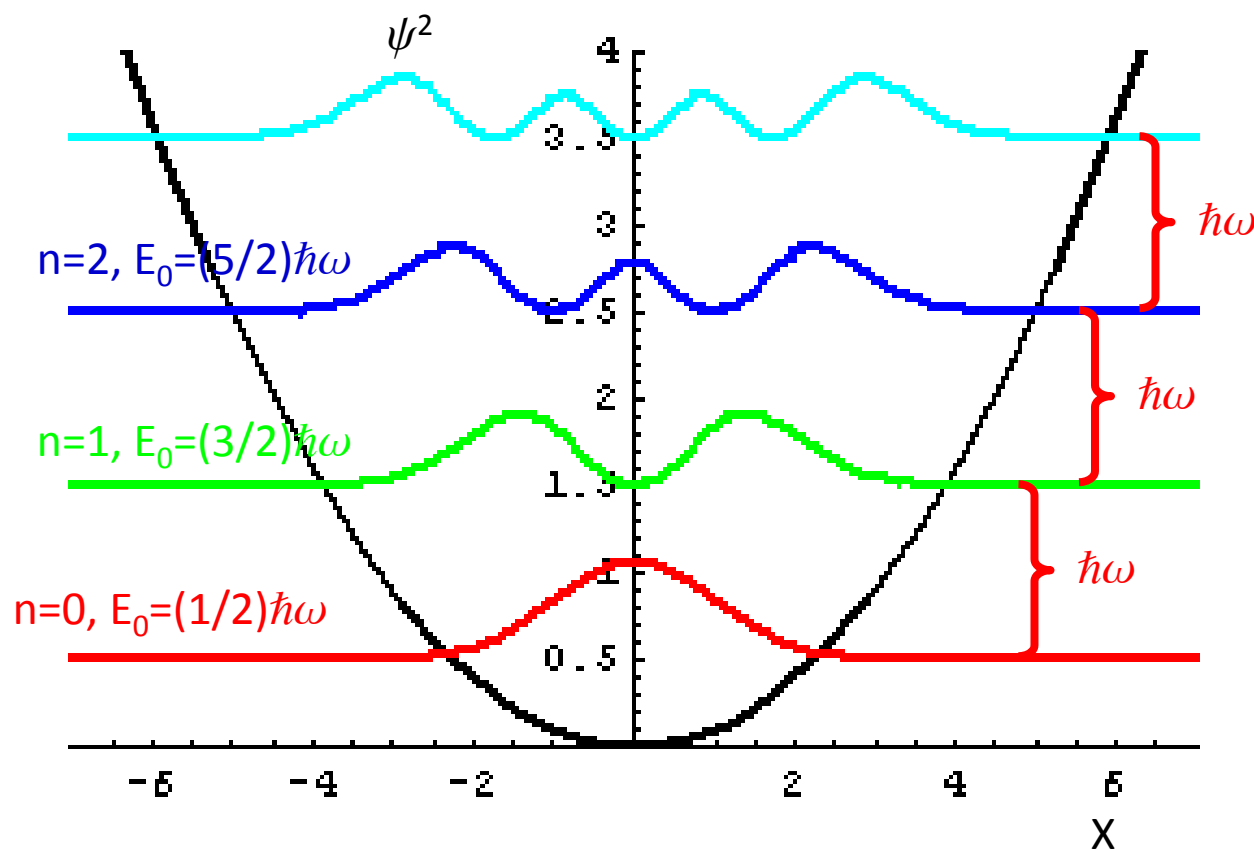
$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

$$\psi_n(x) = N H_n(\alpha x) e^{-(\alpha^2 x^2)/2} \quad \alpha^2 = \sqrt{km} / \hbar$$

$$\int \psi_n^2 dx = 1 \quad N = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

# Хармоничен осцилатор

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$H_2 = (4\alpha^2 x^2 - 2)$$

$$\psi_2 = 2^{-3/2} \alpha^{1/2} \pi^{-1/4} (4\alpha^2 x^2 - 2) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

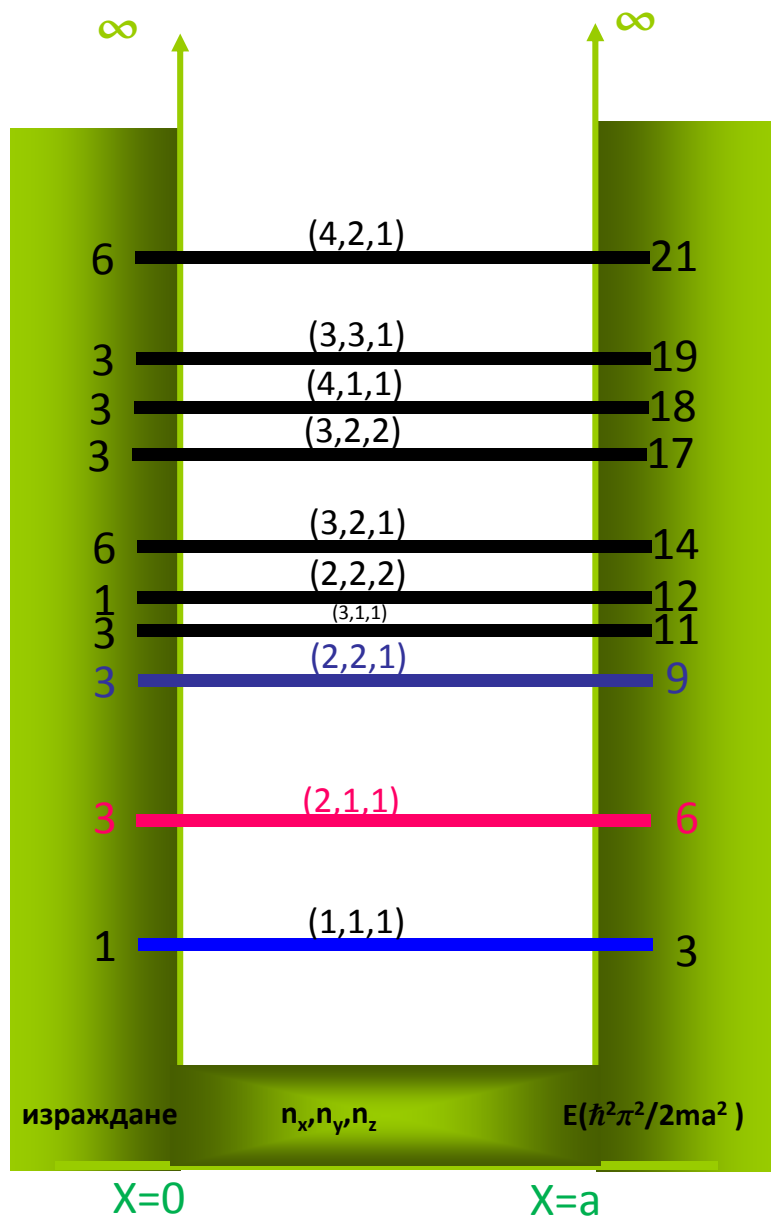
$$H_1 = 2\alpha x$$

$$\psi_1 = 2^{-1/2} \alpha^{1/2} \pi^{-1/4} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

$$H_0 = 1$$

$$\psi_0 = \alpha^{1/2} \pi^{-1/4} e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

# Безкрайна потенциална яма – 3D



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x, y, z < 0, x, y, z > a \\ 0 & 0 \leq x, y, z \leq a \end{cases}$$

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z} = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^3} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{a}\right)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$

Основно състояние

$$n_x = 1; n_y = 1; n_z = 1 \Rightarrow$$

$$E_{1,1,1} = \frac{3 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Първо възбудено

$$\left. \begin{aligned} n_x = 2; n_y = 1; n_z = 1 \\ n_x = 1; n_y = 2; n_z = 1 \\ n_x = 1; n_y = 1; n_z = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$E_{2,1,1} = \frac{6 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Второ възбудено

$$\left. \begin{aligned} n_x = 2; n_y = 2; n_z = 1 \\ n_x = 1; n_y = 2; n_z = 2 \\ n_x = 2; n_y = 1; n_z = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$E_{2,2,1} = \frac{9 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

# Централен потенциал

$$V(\vec{r}) \equiv V(r, \theta, \varphi) = V(r)$$

Сферични координати:  $\{x, y, z\} \Rightarrow \{r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)\}$

$l^2$  е интеграл на движението, т.е.  $[H, l^2] = 0$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \hat{L} &= -i\hbar \hat{r} \times \nabla \end{aligned} \quad -i\hbar \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} [l_x, l_y] &= i\hbar l_z \\ l^2 &= l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \\ [l^2, l_i] &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = -i\hbar r \frac{\partial}{\partial r}$$

$$l^2 = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = r^2 p^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{p} + 2i\hbar \vec{r} \cdot \vec{p} = r^2 p^2 + \hbar^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hbar^2 2r \frac{\partial}{\partial r}$$

$$l^2 = r^2 p^2 + \hbar \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi = E \psi$$

$$\hat{H} \psi = E \psi$$

$$\psi = R(r) Y(\theta, \varphi)$$

$$l^2 \psi = \hbar^2 \lambda \psi \quad l^2 = \hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

# Централен потенциал – ъглова част

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi = \lambda \psi \quad Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

$$\lambda = l(l+1)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$\Theta_{lm}(\theta) = \left[ \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\cos(\theta))$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\cos \theta)$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin(\theta)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$$

$$Y_{1+1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{+i\varphi} \sin(\theta)$$

$$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{-i\varphi} \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2(\theta) - 1)$$

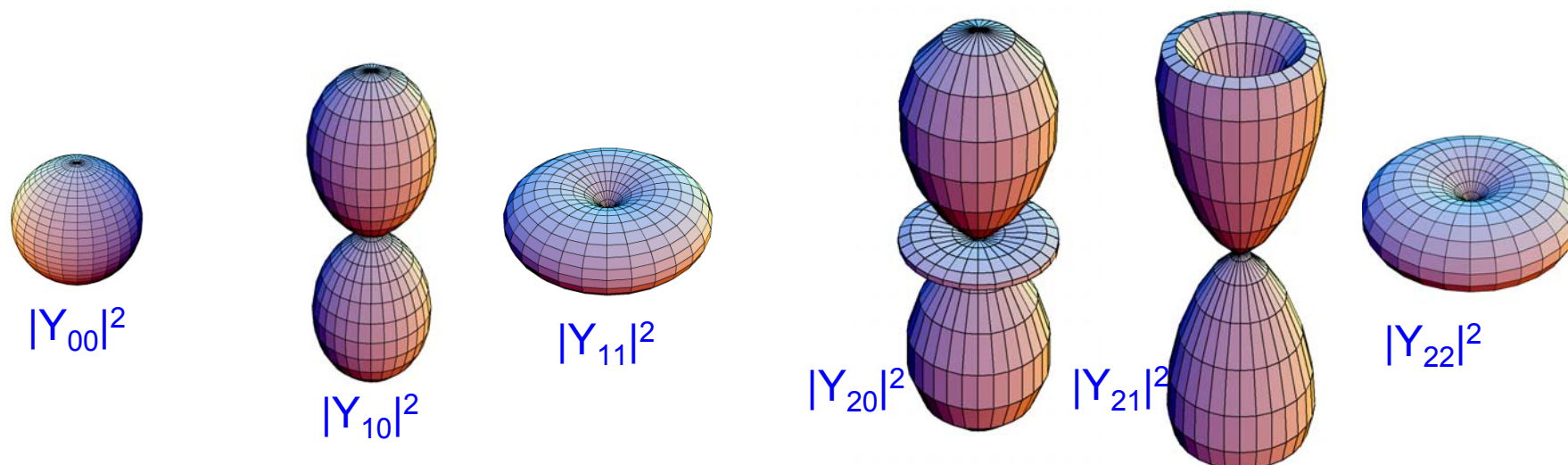
$$Y_{2+1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{-2i\varphi} \sin^2(\theta)$$

$$Y_{2+2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2(\theta)$$

За всяка стойност на орбиталното квантово число ( $l$ ) съществуват  **$2l+1$**  решения свързани с магнитното квантово число ( $m_l$ )

# Плътност, определена от ъгловата част



- За всеки централен потенциал големината на орбиталния ъглов момент е добро квантово число:  
 $\langle l^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1), l=0, 1, 2, \dots$

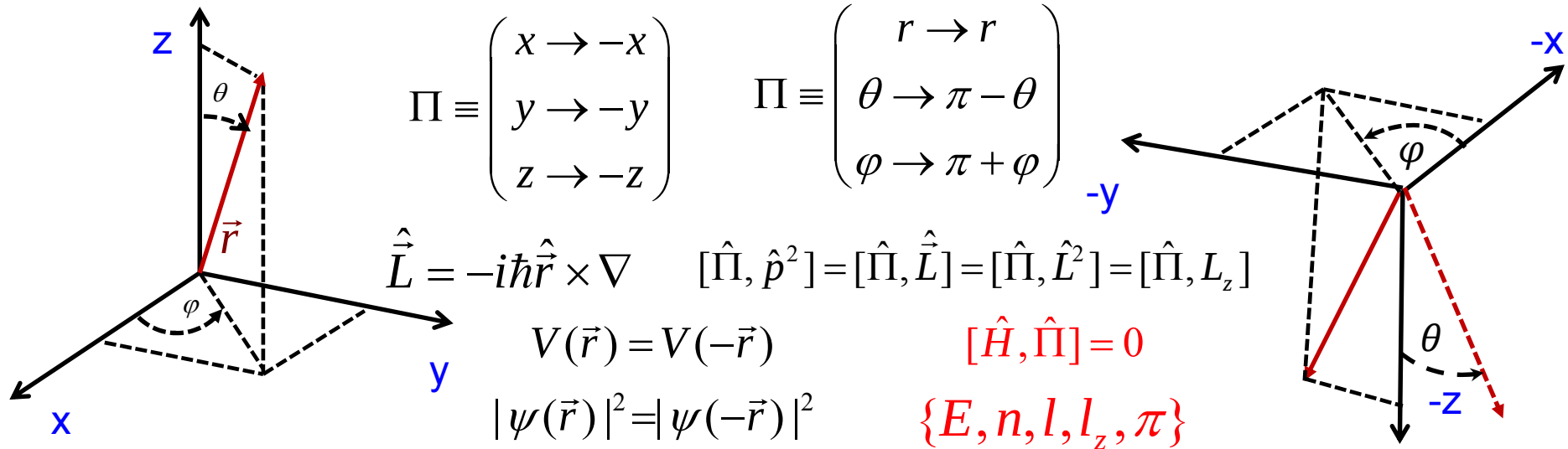
## Спектрометрични означения

| $l$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| СИМВОЛ | s | p | d | f | g | h | i |

- Възможно е да познаваме само една от компонентите на орбиталния ъглов момент

$$l_z = \hbar m_l, m_l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

# Орбитален ъглов момент и пространствено отражение



$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\cos\theta)$$

$$e^{im\varphi} \rightarrow e^{im(\varphi+\pi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$$

$$\theta \rightarrow \pi - \theta: \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$P_l^m(-z) = (-1)^{l-m} P_l^m(z)$$

$$\hat{\Pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y(\theta, \phi)$$

$$\hat{\Pi} \Psi(\vec{r}) = \pi \Psi(-\vec{r})$$

$$\hat{\Pi}^2 \Psi(\vec{r}) = \pi^2 \Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})$$

$$\pi = \pm$$

# Пълен ъглов момент

Нуклеоните (протони и неутрони) вътрешен спин 1/2

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= \hbar^2 s(s+1) & \vec{j} &= \vec{s} + \vec{l} & \langle j^2 \rangle &= \hbar^2 j(j+1) \\ \langle s_z \rangle &= \hbar m_s & m_s &= \pm 1/2 & \langle j_z \rangle &= \hbar m_j & m_j &= -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_j &= m_l + m_s = m_l \pm 1/2 & j &= l \pm 1/2 \\ m_j &= \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots \end{aligned}$$

Означения:  $n \ell_j$

$$1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1d_{3/2}, 2s_{1/2}, 1f_{7/2}, 1f_{5/2}, 2p_{3/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}, 2d_{5/2}$$

# Централен потенциал – радиална част

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{l}^2}{2mr^2} + V(r)\right]\Psi = E\Psi$$

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right) R = ER$$

## Алтернативен подход

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E) \right) \Psi = 0$$

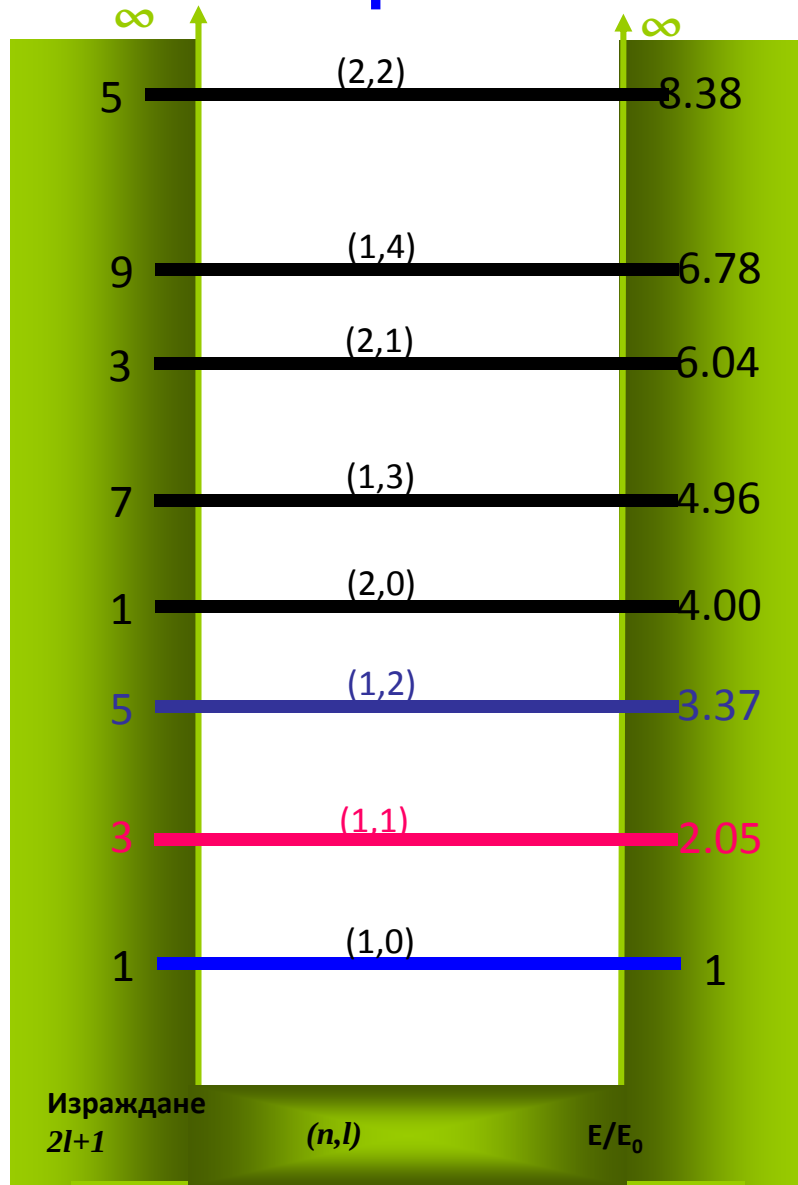
$$\Psi(r, \theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi)R(r) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E) R - AR = 0$$

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + AY = 0$$

$$A = l(l+1) \quad \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{B}{\sin^2(\theta)} + A\Theta = 0$$

$$B = m^2 \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + B\Phi = 0$$

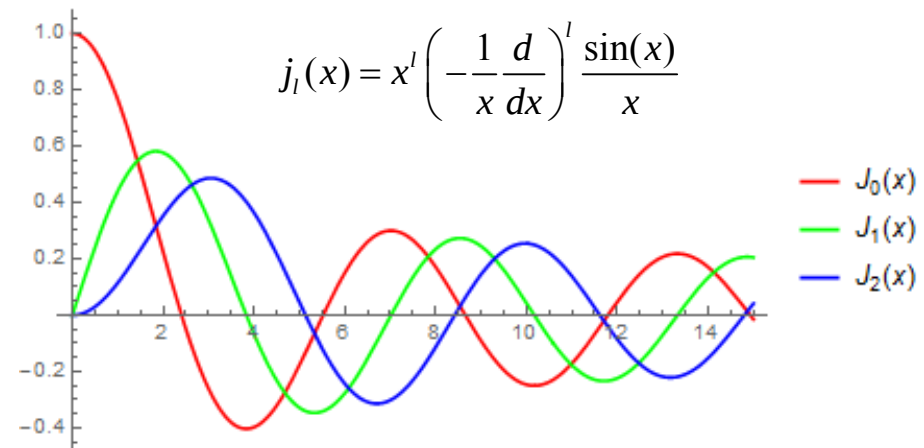
# Безкрайна потенциална яма – 3D



**r=a**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right) R = ER$$

$$R_l(r) = N_l j_l(kr) \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$



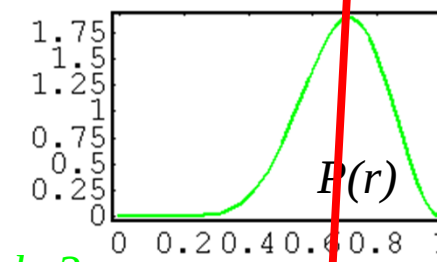
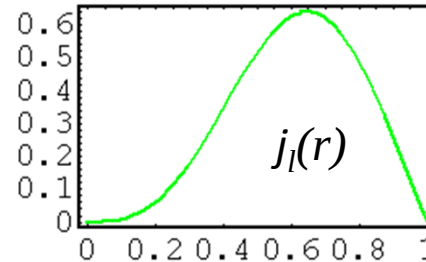
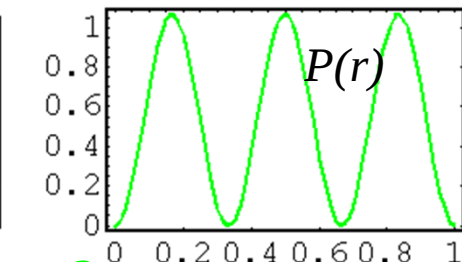
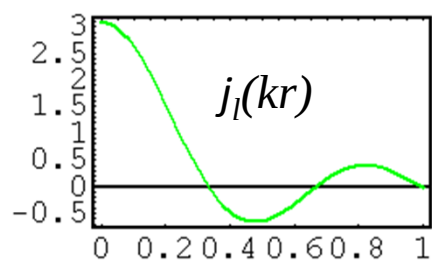
$$j_l(ka) = 0 \Rightarrow \{\xi_n^l\} \Rightarrow E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (\xi_n^l)^2$$

|       |               |   |                           |      |   |      |
|-------|---------------|---|---------------------------|------|---|------|
| n     | =             | 1 | 2                         | 3    | 4 | .... |
| l = 0 | { $\xi_n^0$ } | = | 3.14, 6.28, 9.42, 12.56,  | .... |   |      |
| l = 1 | { $\xi_n^1$ } | = | 4.49, 7.72, 10.90, 14.06, | .... |   |      |

2l+1 израждане по m<sub>l</sub>

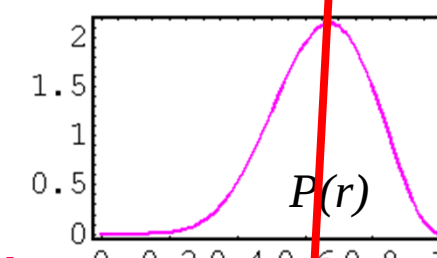
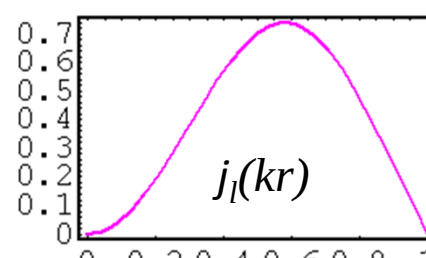
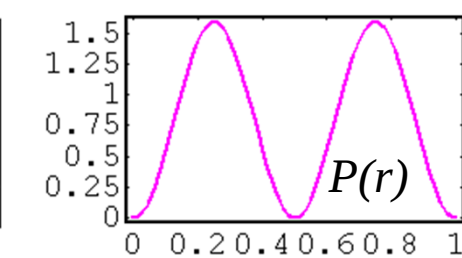
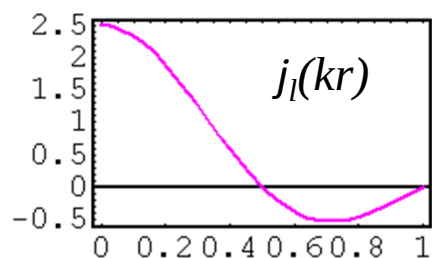
# Центробежен потенциал

$$P(r) dr = \int |\psi|^2 d\mathbf{v} = r^2 |R(r)|^2 dr \int \sin\theta d\theta \int |Y_{lm}|^2 d\phi = r^2 |R(r)|^2 dr$$



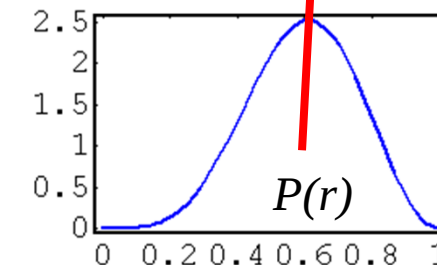
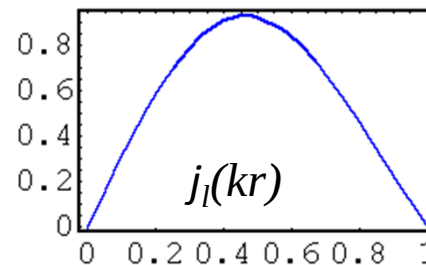
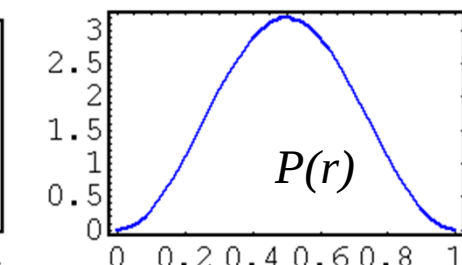
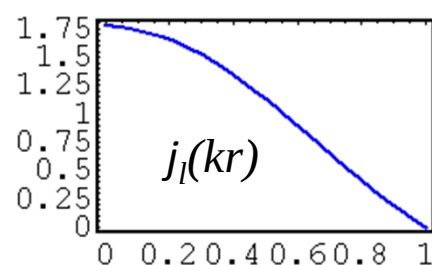
$n=2$

$l=3$



$n=1$

$l=2$



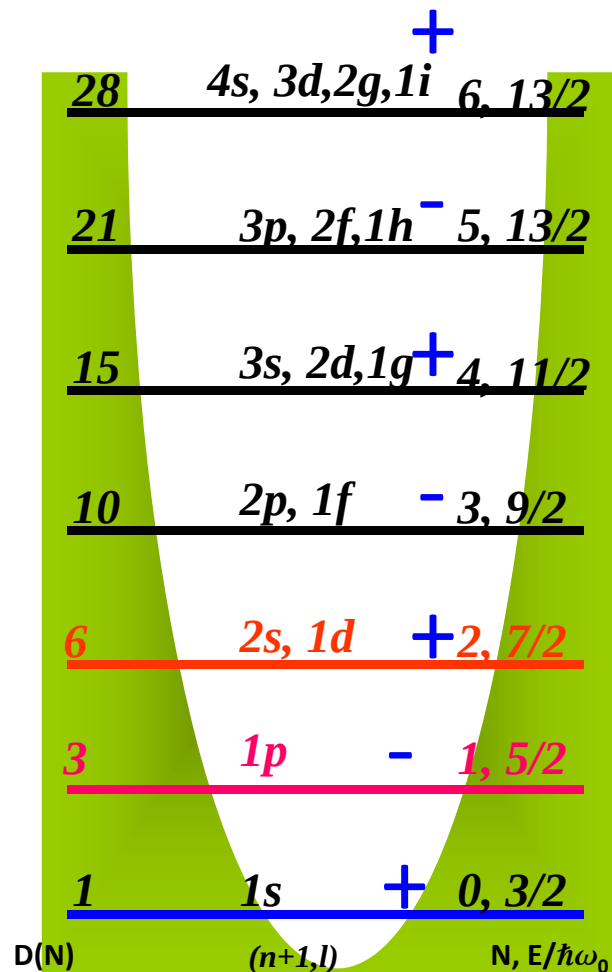
$l=1$

$n=0$

$$l=0 - \text{const} \quad V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad n=0 - \text{const}$$

# Сферичен хармоничен осцилатор

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$$



$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega_0^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{1(1+1)}{r^2} \right] R = E R$$

$$R \propto F\left(-n, 1 + \frac{3}{2}; \frac{m\omega_0}{\hbar^2} r^2\right)$$

$$E_{nl} = \hbar \omega_0 \left( 2n + 1 + \frac{3}{2} \right) = \hbar \omega_0 \left( N + \frac{3}{2} \right)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$  - радиално квантово число

$N$  - главно квантово число - осцилаторен слой;

$N$  - четно (нечетно)  $\Rightarrow l$  четно (нечетно) 0(1), 2(3)... $N$   
 $\Rightarrow N$  определя четността на състоянията в него

за дадено  $l$  имаме  $(2l + 1)$  израждане по  $m_l$   
 $\Rightarrow$  пълното израждане за дадено квантово число  $N$

$$D(N) = \sum_{l=0,1}^N (2l + 1) = \frac{1}{2} (N + 1) (N + 2)$$

# Квантова статистика

Атомното ядро е изградено от **голям** брой частици от два типа (протони и неутрони), които обаче са **неразличими** помежду си.

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$   
 $A, B$

$$\Psi = \psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2)$$

$$\Psi = \psi_B(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)$$

Плътноста на вероятността ( $|\Psi|^2$ ) за система от неразличими частици трябва да е **инвариантна** по отношение на размяната на всеки две частици.

$$\Psi = \Psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) \pm \psi_B(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_A(\vec{r}_1) & \psi_A(\vec{r}_2) \\ \psi_B(\vec{r}_1) & \psi_B(\vec{r}_2) \end{vmatrix}$$

$$\Psi_{12} = \Psi_{21} \quad 0, 1, 2, \dots \quad \text{Бозе}$$

$$\Psi_{12} = -\Psi_{21} \quad \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad \text{Ферми}$$

$$p, n: \quad \frac{1}{2}$$

## Случай на повече от две части

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{A}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(A) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_A(1) & \varphi_A(2) & \dots & \varphi_A(A) \end{vmatrix}$$

Детерминанта на Слейтър

Вероятността два фермиона да се намират едновременно в едно също квантово състояние винаги е 0!

# Преходи между квантови състояния

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \equiv \hat{H}(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad \psi_n = \varphi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t / \hbar}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2 \quad \Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} \quad \begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \langle \psi | H^2 | \psi \rangle \\ \langle E \rangle^2 &= \langle \psi | H | \psi \rangle^2 \end{aligned} \quad \Delta t = \infty$$

$$U(\vec{r}) + V'(t) \quad \begin{aligned} \psi_i &\rightarrow \psi_f \\ E_r &= E_i - E_f \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Delta E &= \Gamma \neq 0 \\ \tau &\simeq \hbar / \Gamma \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{естествена ширина на} \\ \text{линията} \end{array}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad \begin{array}{l} \text{Златно правило на} \\ \text{Ферми} \end{array}$$

$$V'_{fi} = \langle \psi_f | \hat{V}_{fi} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \hat{V}_{fi} \psi d\nu \quad \begin{array}{l} \text{Матричен елемент на} \\ \text{прехода!} \end{array}$$