

Общи (статични) свойства на ядрата

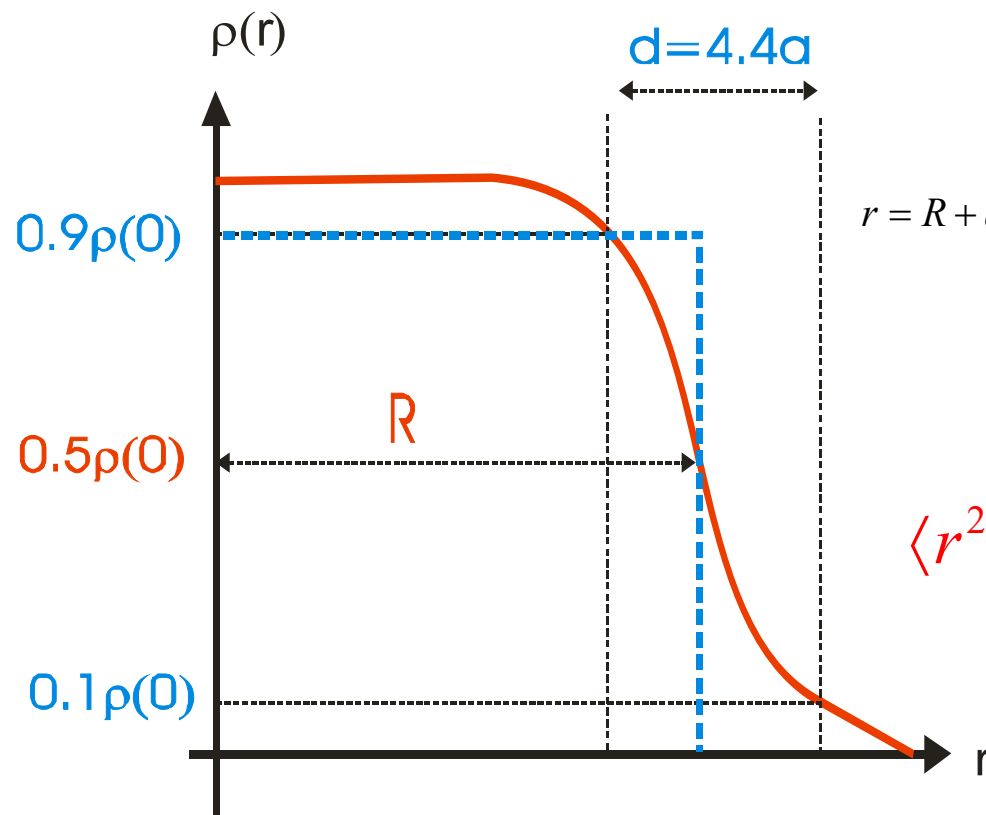
Ядрен радиус.

Маси и разпространение на изотопите.

Енергия на свързване.

Ядрен радиус

Функция на ферми



$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right) \right]^{-1}$$

$$\rho(r=R) = 0.5\rho_0 \quad \frac{A}{(4/3)\pi R^3} \sim \text{const} \Rightarrow R = \text{const} \cdot A^{1/3}$$

$$r = R + a \ln\left[\frac{\rho_0}{\rho(r)} - 1\right] \quad d = r(@0.1\rho_0) - r(@0.9\rho_0) = 4a \cdot \ln(3)$$

Средно-квадратичен радиус

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int \rho(r) r^2 d^3 r}{\int \rho(r) d^3 r} \quad R_{rms} = \left(\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right)^{1/2}$$

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} \neq R$$

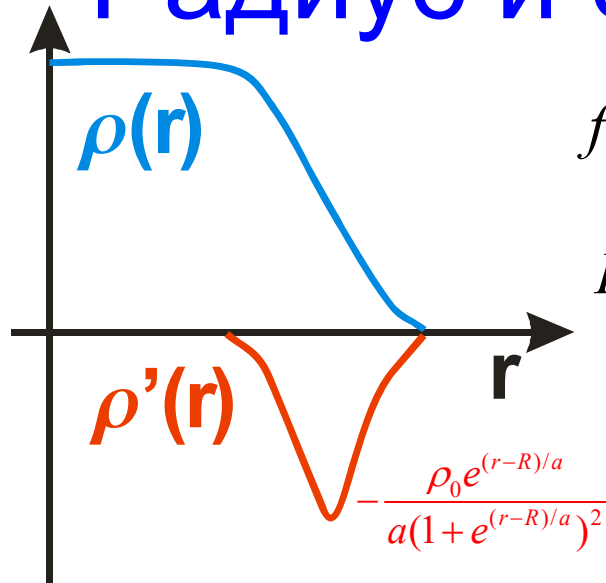
$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\int \rho(r) d^3 r = \int_0^R \rho(r) r^2 dr \int_{\Omega} d\Omega = 4\pi\rho_0 \frac{1}{3} R^3$$

$$\int \rho(r) r^2 d^3 r = \int_0^R \rho(r) r^4 dr \int_{\Omega} d\Omega = 4\pi\rho_0 \frac{1}{5} R^5$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$$

Радиус и средно-квадратичен радиус



$$f(r=0) < \infty \quad \int_0^\infty f(r)\rho(r)dr = [F(r)\rho(r)]_0^\infty - \int_0^\infty F(r)\rho'(r)dr$$

$$F(r) = \int_0^r f(z)dz \quad [F(r)\rho(r)]_0^\infty = F(\infty)\rho(\infty) - F(0)\rho(0) = 0$$

$$F(r) = F(R) + \frac{f(R)}{1!}(r-R) + \frac{1}{2!}\left[\frac{df(r)}{dr}\right]_{r=R}(r-R)^2 + \dots$$

$$\int_0^\infty f(r)\rho(r)dr = -F(R)\rho_0\left(\int_0^\infty -\frac{e^{(r-R)/a}}{a(1+e^{(r-R)/a})^2}dr\right) - f(R)\rho_0\left(\int_0^\infty -\frac{(r-R)e^{(r-R)/a}}{a(1+e^{(r-R)/a})^2}dr\right) - \frac{\rho_0}{2}\left[\frac{df(r)}{dr}\right]_{r=R}\left(\int_0^\infty -\frac{(r-R)^2e^{(r-R)/a}}{a(1+e^{(r-R)/a})^2}dr\right) =$$

$R \gg a$

$$= \rho_0 \int_0^R f(r)dr \int_{-R/a}^\infty \frac{e^b}{(1+e^b)^2}db + f(R)\rho_0 a \int_{-R/a}^\infty \frac{be^b}{(1+e^b)^2}db + \frac{\rho_0}{2}\left[\frac{df(r)}{dr}\right]_{r=R} a^2 \int_{-R/a}^\infty \frac{b^2 e^b}{(1+e^b)^2}db =$$

$$= \rho_0 \int_0^R f(r)dr \left[1 - \frac{1}{1+e^{R/a}}\right] + f(R)\rho_0 a \left[\frac{R}{a+ae^{R/a}} + \ln(1+e^{R/a})\right] + \frac{\rho_0}{2}\left[\frac{df(r)}{dr}\right]_{r=R} a^2 \left[\frac{\pi^2}{3} - \frac{R^2}{a^2(1+e^{R/a})} - \frac{2R \ln(1+e^{-R/a})}{a} + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{(-e^{-R/a})^k}{k^2}\right] =$$

$$= \rho_0 \left[\int_0^R f(r)dr + \frac{\pi^2}{6} a^2 \left[\frac{df(r)}{dr} \right]_{r=R} \right]$$

$$f(r) = r^{n+2}$$

$$\int r^n \rho(r) d^3 \vec{r} = 4\pi \rho_0 \left[\int_0^R r^{n+2} dr + \frac{\pi^2}{6} a^2 [(n+2)r^{n+1}]_{r=R} \right]$$

Радиус и средно-квадратичен радиус

$$\int r^n \rho(r) d^3 \vec{r} = 4\pi \rho_0 \left[\int_0^R r^{n+2} dr + \frac{\pi^2}{6} a^2 [(n+2)r^{n+1}]_{r=R} \right]$$

$$n=0: \int \rho(r) d^3 \vec{r} = 4\pi \rho_0 R^3 \frac{1}{3} \left[1 + \pi^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right]$$

$$n=2: \int r^2 \rho(r) d^3 \vec{r} = 4\pi \rho_0 R^5 \frac{1}{5} \left[1 + \frac{20\pi^2}{6} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right]$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int \rho(r) r^2 d^3 r}{\int \rho(r) d^3 r}$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 \frac{1 + \frac{20\pi^2}{6} \left(\frac{a}{R} \right)^2}{1 + \pi^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2} \approx \frac{3}{5} R^2 \left[1 + \frac{7\pi^2}{3} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right]$$

$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} \approx 1 + (a-b)x^2 + O(x^3)$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 \left[1 + \frac{7\pi^2}{3} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right]$$

$$R_{rms} = R \sqrt{1 + \frac{7\pi^2}{6} \left(\frac{a}{R} \right)^2}$$

$$R_{rms} = \left(\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right)^{1/2}$$

R_{rms} е чувствителен към дифузността на ядрената повърхност

$R_{rms} \rightarrow R$ когато $a/R \rightarrow 0$

$a \approx 0.55 \div 0.60 \text{ fm} \rightarrow 10\% \text{ ефект}$

Експерименти по разсейване

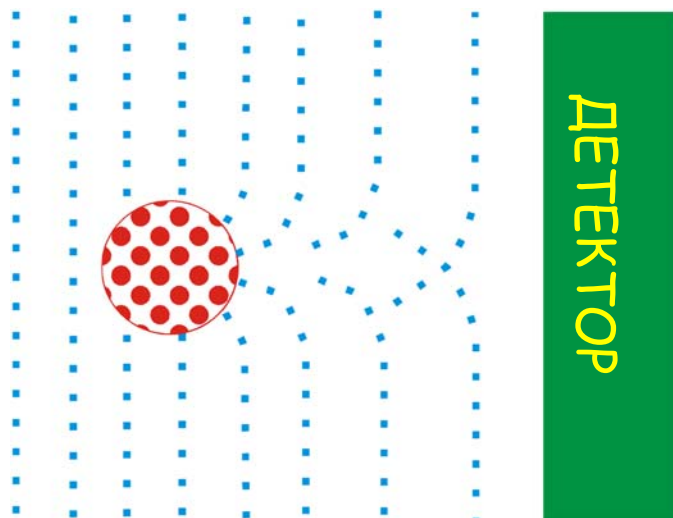
Оптически аналог – снемане на дифракционна картина, която отразява масовото или зарядовото разпределение на ядрената материя

Фрауенхофова дифракция

D – диаметър на ядрото

$$D \sin \theta = m \lambda$$

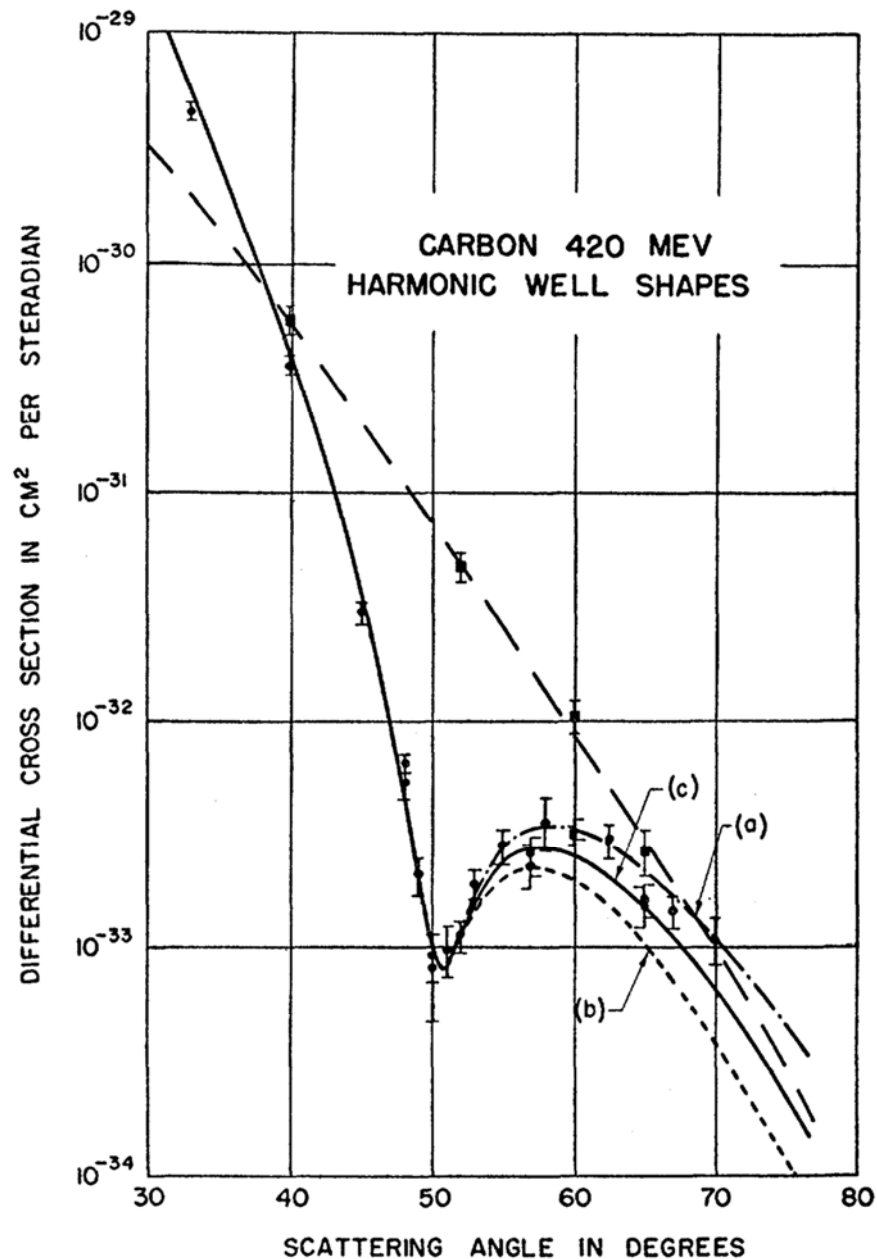
	$m_{\min}$	$m_{\max}$
1	1.22	1.63
2	2.23	2.68
3	3.28	3.69



$$\lambda = \frac{h}{p} \leq D \quad \lambda = \frac{2\pi(197.3)}{E_e[\text{MeV}]} [\text{fm}]$$

Обект	Скала [fm]	Енергия на електрона [MeV]
Атом	10^5	0.01
Тежко ядро (Pb)	10	100
Протон	1	1000
Кварки	0.1 ?	10000

Резултати от (e,e') експерименти



$$E_e = 420 \text{ MeV} \Rightarrow \lambda = 2.9 \text{ fm}$$

$$\theta = 42^\circ$$

$$D \cdot \sin \theta = 1.22 \lambda$$

$$D = 5.28 \text{ fm}$$

$$r(^{16}\text{O}) = 2.64 \text{ fm}$$

$$\theta = 51^\circ$$

$$D = 4.56 \text{ fm}$$

$$r(^{12}\text{C}) = 2.28 \text{ fm}$$

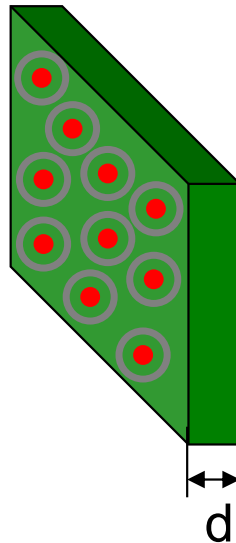
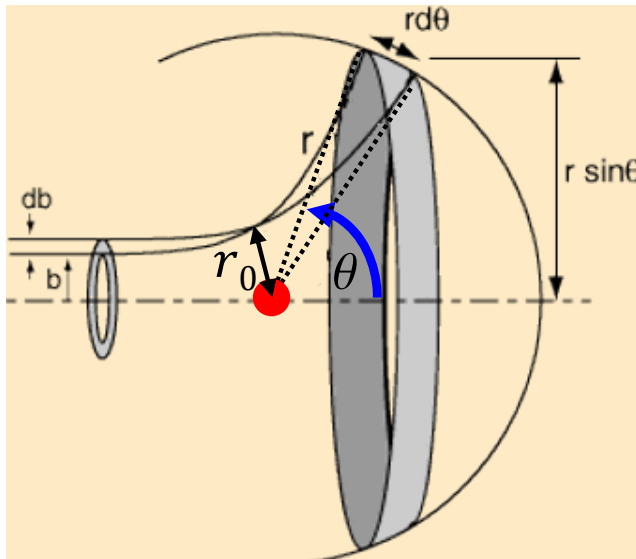
Сечение за Ръдърфордско разсейване

Еластично разсейване на заредени частици от Кулонов потенциал

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r} \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zz'e^2}{r} \quad r_0 = \frac{Zz'e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b^2 E^2}{(Zz'e^2)^2}} \right)$$

$b = \frac{Zz'e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot(\theta/2)$

- за фиксирани $\{b, E, z\}$ ъгълът на разсейване **нараства** с нарастването на **Z**
- за фиксирани $\{b, Z, z\}$ ъгълът на разсейване **намалява** с нарастването на **E**
- за фиксирани $\{Z, z, E\}$ ъгълът на разсейване **намалява** с нарастването на **b**
 – по-малки прицелни параметри водят до по-големи ъгли на разсейване



Мишена

- разстоянието м/у ядрата е многократно по-голямо от размера им
- обемна плътност – **n**
- повърхностна плътност – **nd**
- интензивност на снопа – **I_b**

Приближение

Липса на многократни разсейвания

$$R = I_b n d \sigma$$

σ - сечение за разсейване

$$[\sigma] = \text{barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

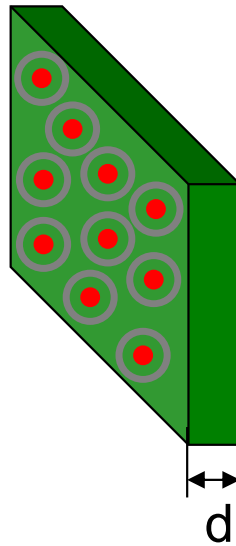
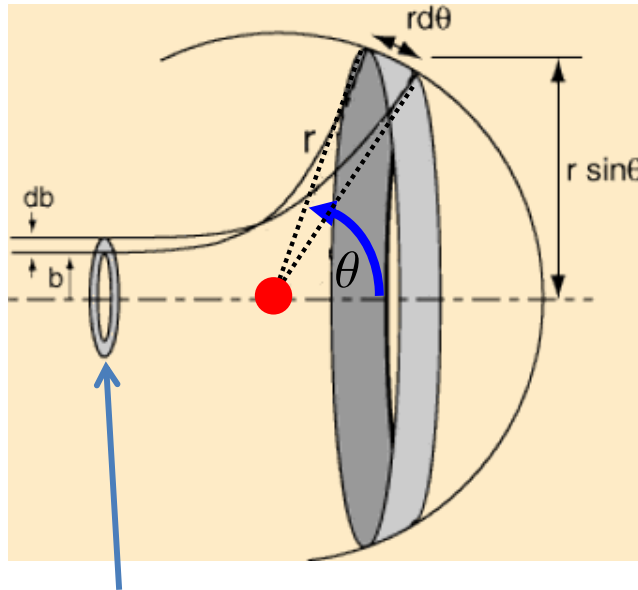
$d\sigma/d\Omega$ диференциално сечение

$$\frac{dR}{d\Omega} = I_b n d \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Сечение за Ръдърфордско разсейване

Колко частици ще се разсеят в пространствен ъгъл $d\Omega$?

$$\frac{dR}{d\Omega} = I_b n d \frac{d\sigma}{d\Omega}$$



броя налитащи частици разсения с импакт параметър: $(b, b + db) \rightarrow (\theta, \theta + d\theta)$

общия брой разсения частици от nd разсейвателни центъра в ъгъл $(\theta, \theta + d\theta)$

$$dR = n d I_b 2 \pi b db$$

$$I_b 2 \pi b db \frac{dR}{d\Omega} = - \frac{n d I_b 2 \pi b db}{2 \pi \sin \theta d \theta} = n d I_b \left(- \frac{b db}{\sin \theta d \theta} \right)$$

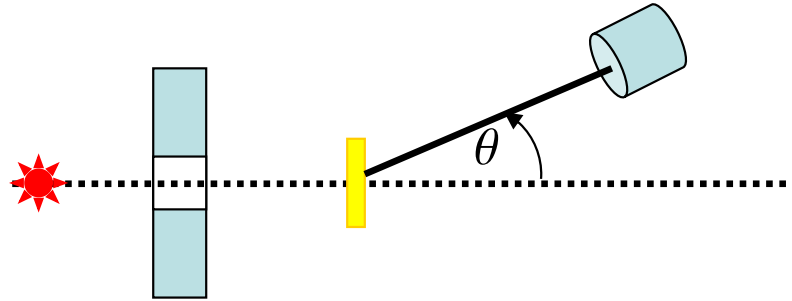
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = - \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

$$b = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Z z' e^2}{2 E} \cot(\theta/2) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \left(\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Z z' e^2}{2 E} \right) \frac{\cot(\theta/2)}{\sin \theta} \left(- \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Z z' e^2}{2 E} \right) \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Z z' e^2}{4 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Сечение за Ръдърфордско разсейване

Измерване на диференциалното сечение



$$\frac{dR}{d\Omega} = I_b nd \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

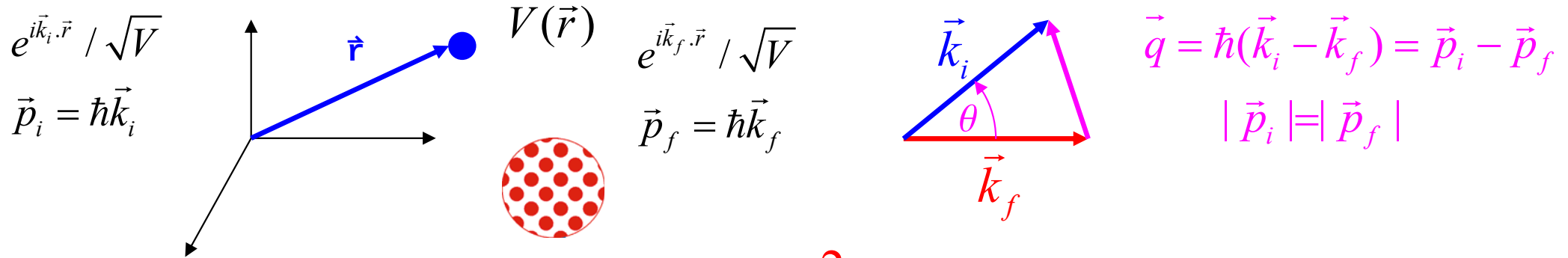
nd брой разсейвателни центрове на единица площ

$$nd = \frac{N}{S} \quad N = \frac{\rho S d}{A} N_A \quad N_A = 6.02214129(27) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$\frac{dR}{d\Omega} = I_b \frac{\rho d}{A} N_A \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$[\rho d] = \text{mg/cm}^2$$

Еластично разсейване - квантово механично описание



Златно правило на Ферми: $\lambda(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = \frac{2\pi}{\hbar} |M(\vec{k}_i, \vec{k}_f)|^2 \rho(E_f) \quad (s^{-1})$

$$j_b = \frac{\dot{N}}{S} = \frac{N_b}{V} v_b \quad R = j_b N_t \sigma \quad \lambda(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = \frac{R}{N_b N_t} = \frac{j_b \sigma}{N_b} = \frac{\sigma v_b}{V} \quad \sigma = \lambda(\vec{k}_i, \vec{k}_f) \frac{m}{p} V$$

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{4\pi p^2 V}{h^3} \frac{m}{p} = \frac{4\pi p m}{h^3} V \quad dn = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} \quad E = \frac{p^2}{2m} \quad \frac{dp}{dE} = \frac{m}{p}$$

$$M(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = \int \psi_f^* V(\vec{r}) \psi_i d^3 \vec{r} = \frac{1}{V} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} = \frac{1}{V} \int V(\vec{r}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r}$$

$$|M(\vec{k}_i, \vec{k}_f)|^2 = M_{fi}^2 / V^2$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{M_{fi}^2}{V^2} \frac{4\pi p m V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{m}{p} V = \frac{m^2}{\pi \hbar^4} M_{fi}^2$$

Еластично разсейване - квантово механично описание

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{M_{fi}^2}{V^2} \frac{4\pi p m V}{h^3} \frac{m}{p} V = \frac{m^2}{\pi \hbar^4} M_{fi}^2$$

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{m^2}{\pi \hbar^4} M_{fi}^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} M_{fi}^2 = |f(\theta)|^2 \quad f(\theta) - \text{амплитуда на разсейване}$$

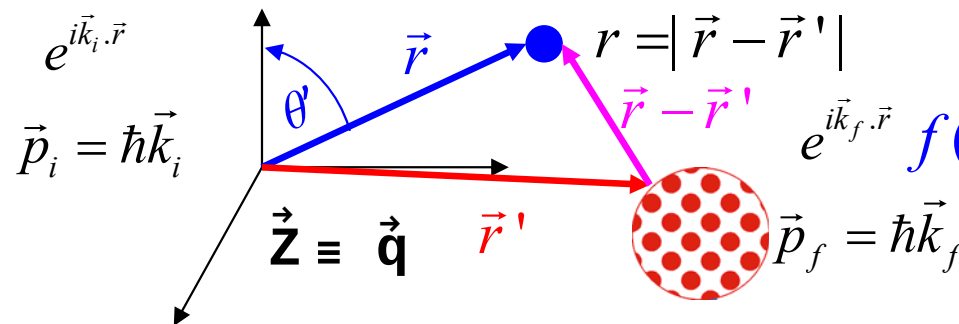
$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int V(\vec{r}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r}$$

Еластично разсейване от централен потенциал

$V(r)$

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta'$$

$$d^3 \vec{r} = r^2 \sin \theta' dr d\theta' d\varphi$$



$$\int_0^\pi e^{\frac{i}{\hbar} r \cdot q \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' = \frac{2 \sin(qr / \hbar)}{(qr / \hbar)}$$

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int_r V(r) r^2 dr \int_\varphi d\varphi \int_{\theta'} e^{\frac{i}{\hbar} r \cdot q \cos \theta'} \sin \theta' d\theta'$$

$$= \frac{m}{2\pi \hbar^2} 2\pi \frac{2\hbar}{q} \int_0^\infty \frac{\sin(qr / \hbar)}{r} V(r) r^2 dr$$

$$f(\theta) = \frac{2m}{q\hbar} \int_0^\infty \sin(qr / \hbar) V(r) r dr$$

Ръдърфордовско разсейване от точков обект

$$f(\theta) = \frac{2m}{q\hbar} \int_0^{\infty} \sin(qr / \hbar) V(r) r dr$$

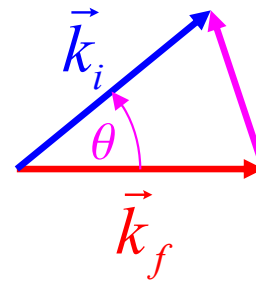
$$V(r) = \frac{Zz'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$f(\theta) = \frac{2m}{q\hbar} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \sin(qr / \hbar) dr = \frac{2m}{q\hbar} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \sin(qr / \hbar) e^{-ra} dr =$$

$$= \frac{2m}{q\hbar} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar}{q} = \frac{2m}{q^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \sin(bx) e^{-ax} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{b}{b^2 + a^2} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f(\theta)|^2 = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{q^4}$$

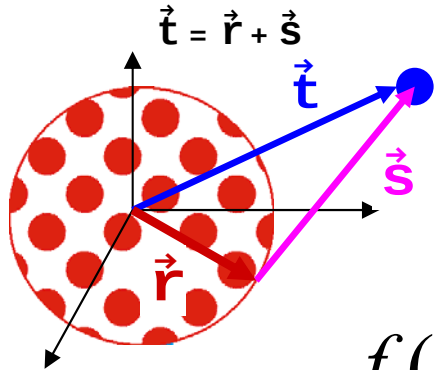


$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f, \quad |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$$

$$q = 2p \sin(\theta / 2), \quad p^2 = 2mE$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta / 2)}$$

Ръдърфордовско разсейване от обект с крайни размери



$$dV = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\rho(r)}{s} d\vec{r}$$

$$f(\theta) = \frac{2m}{q\hbar} \int_0^\infty \sin(qr / \hbar) V(r) r dr$$

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \iint \frac{\rho(r)}{s} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{t}} d\vec{t} d\vec{s}$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \iint \frac{\rho(r)}{s} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot (\vec{r} + \vec{s})} d\vec{r} d\vec{s} = \boxed{\int \rho(r) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r}} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \int \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{s}}}{s} d\vec{s}$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr / \hbar)}{(qr / \hbar)} 4\pi r^2 dr}_{F(q)} \underbrace{\frac{2m}{q\hbar} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_0^\infty \sin(qs / \hbar) ds}_{f(\theta)_{\text{Ruth}}}$$

$F(q)$

$f(\theta)_{\text{Ruth}}$

ядрен форм-фактор

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = F^2(q^2) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}$$

Фурие образ на ядрената зарядова плътност

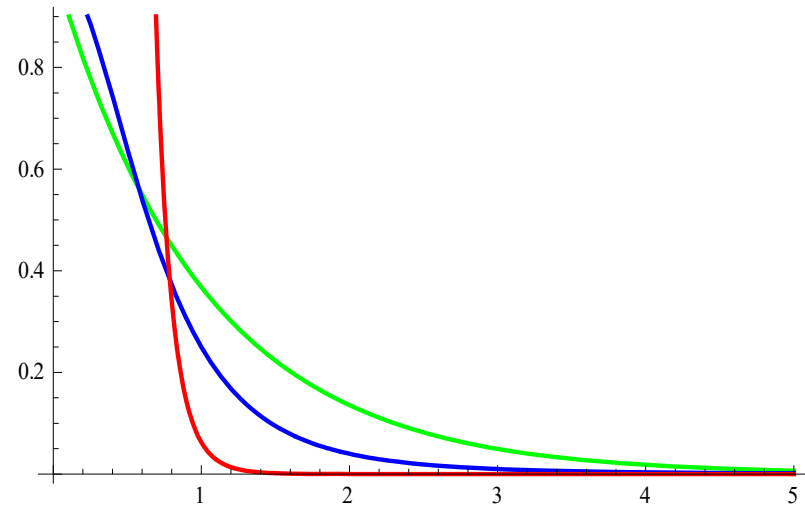
Ядрен форм-фактор

$$F(q^2) = \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr / \hbar)}{(qr / \hbar)} 4\pi r^2 dr$$

$$\rho(r) = (a^3 / 8\pi) e^{-ar}$$

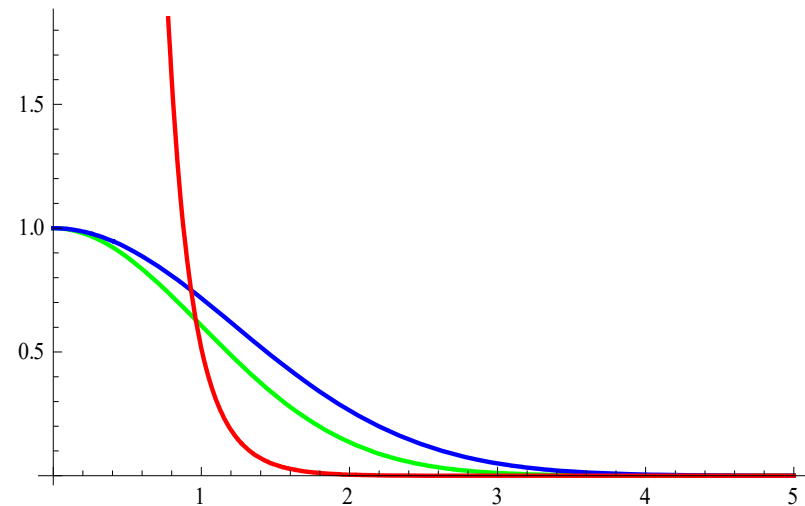
$$|F(q^2)| = 1 / (1 + q^2 / a^2 \hbar^2)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = F^2(q^2) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth}$$



$$\rho(r) = (a^2 / 2\pi)^{3/2} e^{-a^2 r^2 / 2}$$

$$|F(q^2)| = e^{-q^2 / 2a^2 \hbar^2}$$



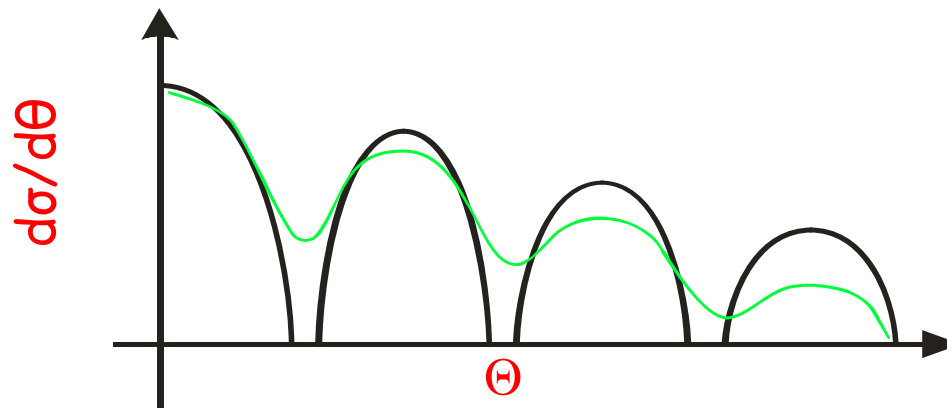
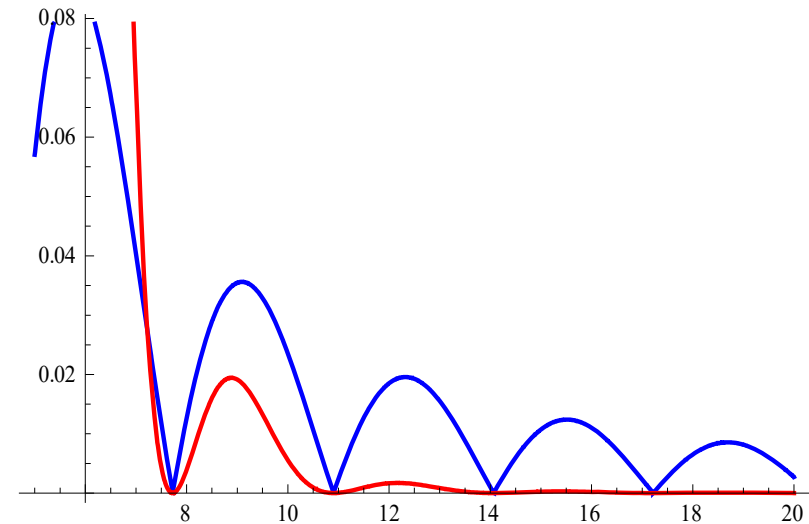
Ядрен форм-фактор

$$F(q^2) = \int_0^{\infty} \rho(r) \frac{\sin(qr / \hbar)}{(qr / \hbar)} 4\pi r^2 dr$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = F^2(q^2) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth}$$

$$\rho(r) = \begin{cases} \text{const} = 3 / 4\pi R^3, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

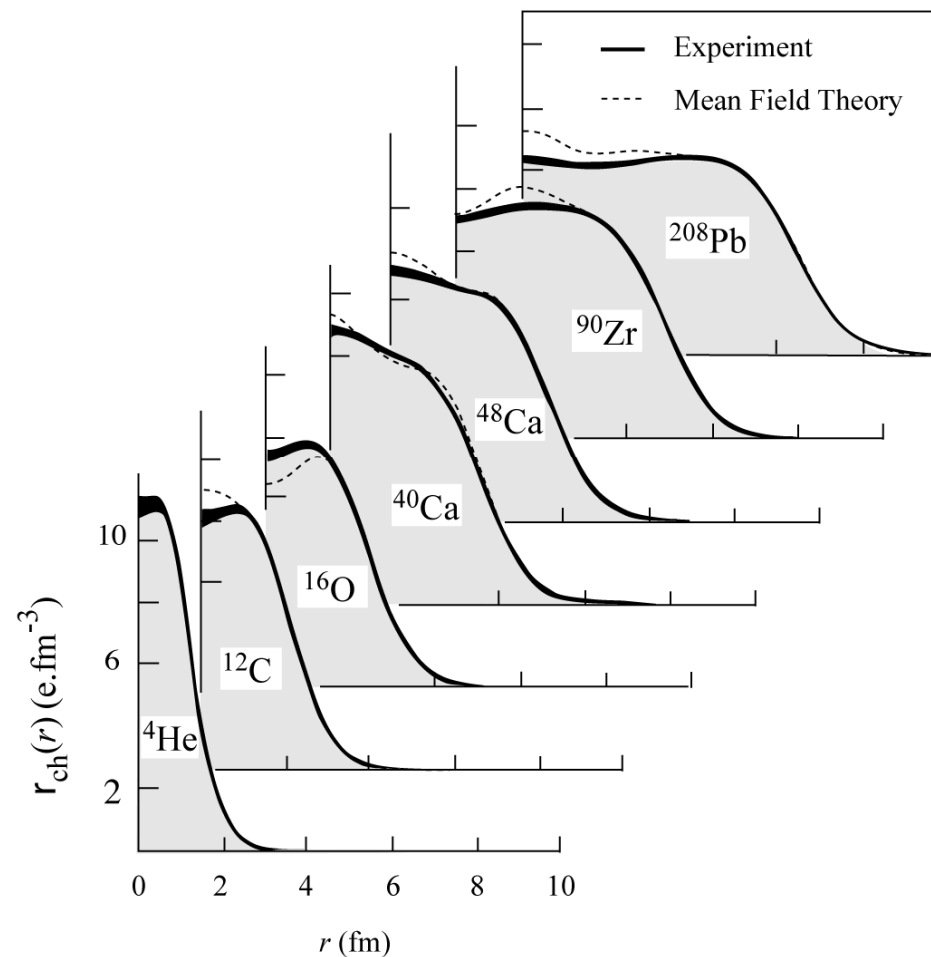
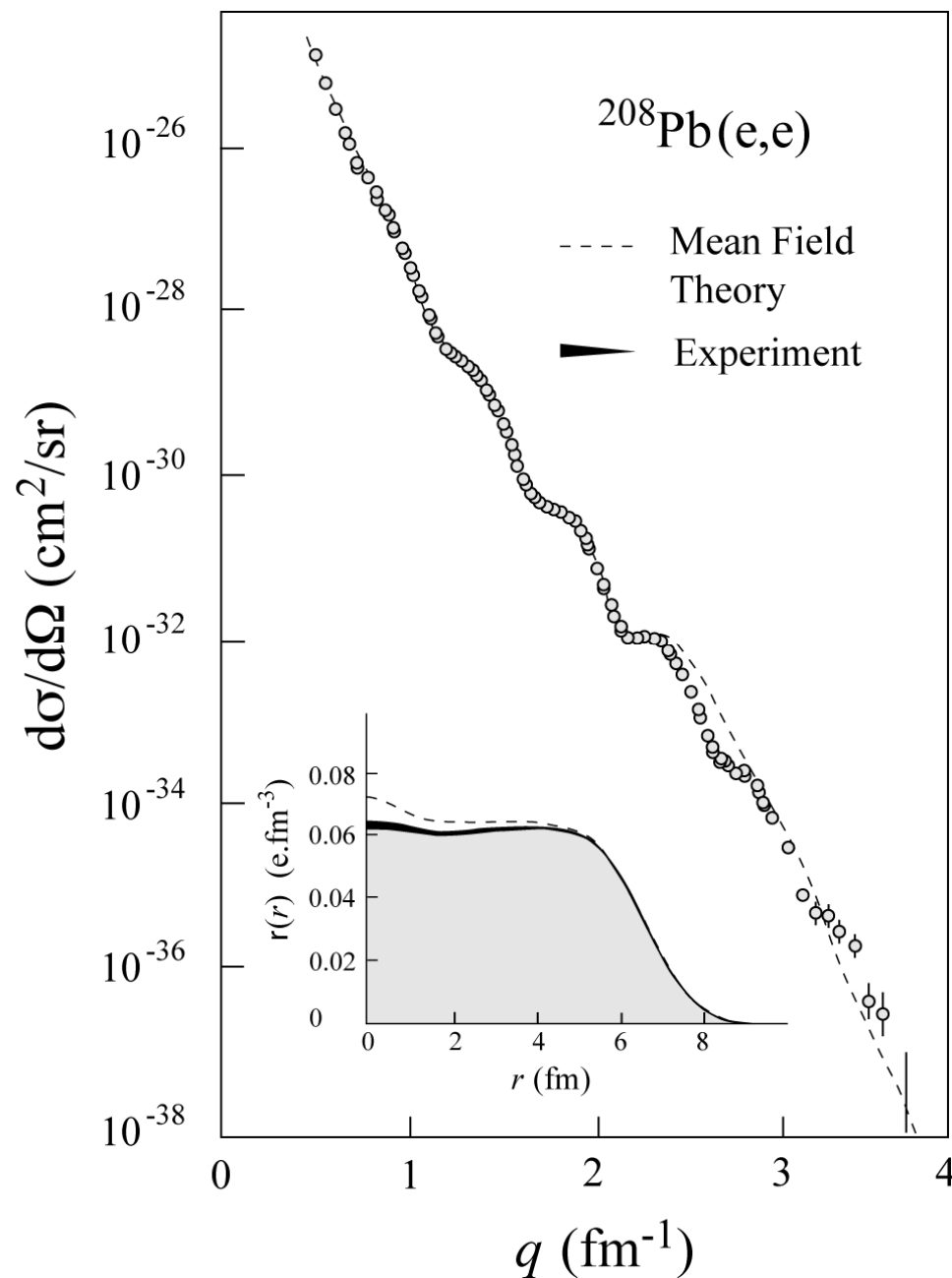
$$|F(q^2)| = 3 \left(\frac{\hbar}{qR} \right)^3 \left(\sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - \left(\frac{qR}{\hbar}\right) \cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right) \right)$$



Резултати от (e,e') експерименти

Релативистки частици

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$



$$R = 1.23(1)A^{1/3}[\text{fm}]$$

$$d \approx 2.3 \text{ fm}$$

Метод на изотопното отместване

Какво е влиянието на ядрения радиус в/у електроните от атомната обвивка?

Ядрото е точков обект

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

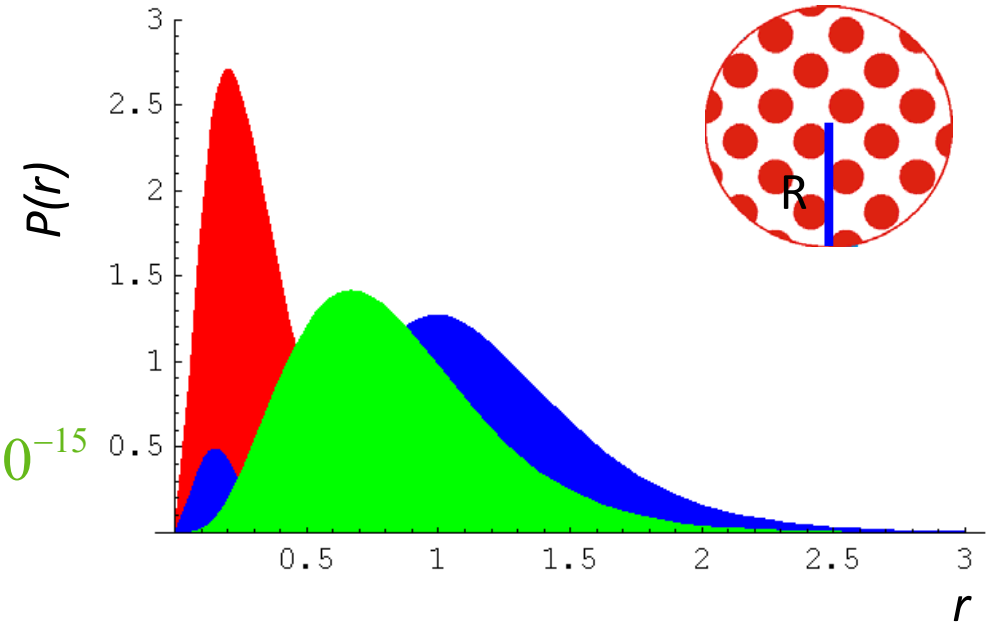
Ядрото е сферично тяло с радиус R

$$V'(r; r < R) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$P_{1s} = 1.6 \times 10^{-6} \quad P_{2s} = 4.0 \times 10^{-7} \quad P_{2p} = 4.1 \times 10^{-15}$$

$$E' \approx \int_{r < R} \psi_n^* V' \psi_n d\nu + \int_{r > R} \psi_n^* V \psi_n d\nu$$

$$\Delta E = E' - E \approx \langle V' \rangle - \langle V \rangle$$



$$\psi_{1s} = 2(Z/a_0)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \approx 5.3 \times 10^{-11} m$$

$$R/a_0 \approx 10^{-4}$$

$$\Delta E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Z^4}{a_0^3} \int_0^R e^{-2Zr/a_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^3} \right) r^2 dr \approx \frac{2}{5} \frac{Z^4 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{a_0^3}$$

Метод на изотопното отместване

Какво е влиянието на ядрения радиус в/у електроните от атомната обвивка?

$$\Delta E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Z^4}{a_0^3} \int_0^R e^{2Zr/a_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^3} \right) r^2 dr \approx \frac{2}{5} \frac{Z^4 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{a_0^3}$$

K рентгеновото лъчение на съседни изотопи с масови числа A и A'

$$E_k(A) - E_k(A') = E_{2p}(A) - E_{1s}(A) - E_{2p}(A') + E_{1s}(A') = E_{1s}(A') - E_{1s}(A)$$

$$E'(A) = E(A) + \Delta E(A)$$

K рентгеново изотопно отместване

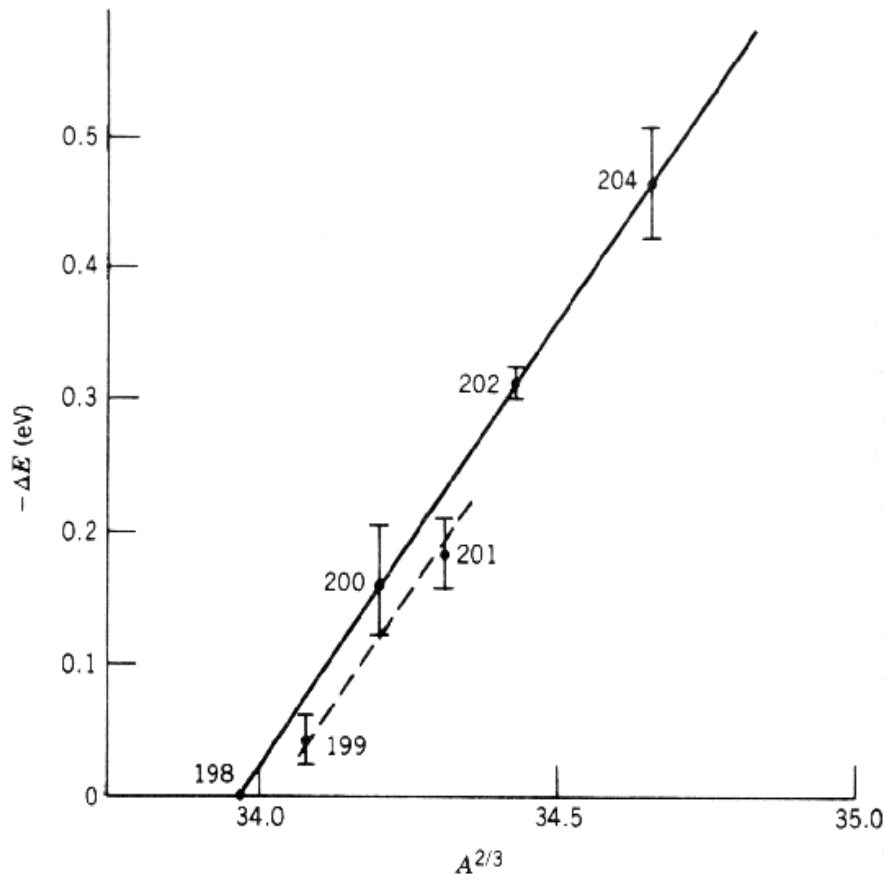
$$= \Delta E(A') - \Delta E(A) = \frac{2}{5} \frac{Z^4 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R(A')^2 - R(A)^2}{a_0^3} = -\frac{2}{5} \frac{Z^4 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_0^2}{a_0^3} (A^{2/3} - A'^{2/3})$$

$$R = R_0 A^{1/3}$$

Метод на изотопното отместване

Резултати

Изотопно отместване за ядрата на Hg P.L. Lee et al, Phys Rev C 17, 1859 (1978)



- зависимостта $A^{2/3}$ се изпълнява;
- при детайлно отчитане на вълновата функция на 1s електроните (релативно) от наклона на кривите се получава: $R_0 = 1.2$ fm
- наблюдава се четно-нечетено зигзагообразно поведение, дължащо се на орбитата на последния (несдвоен) нуклон;

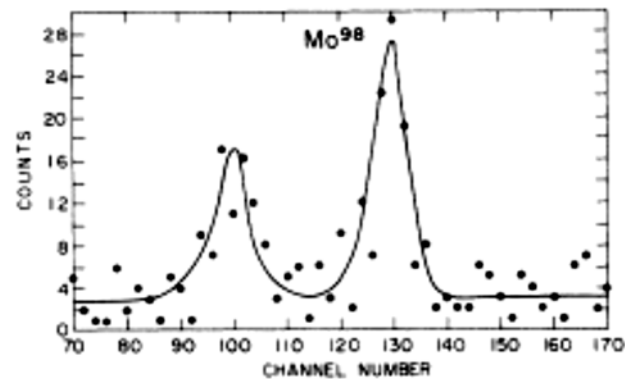
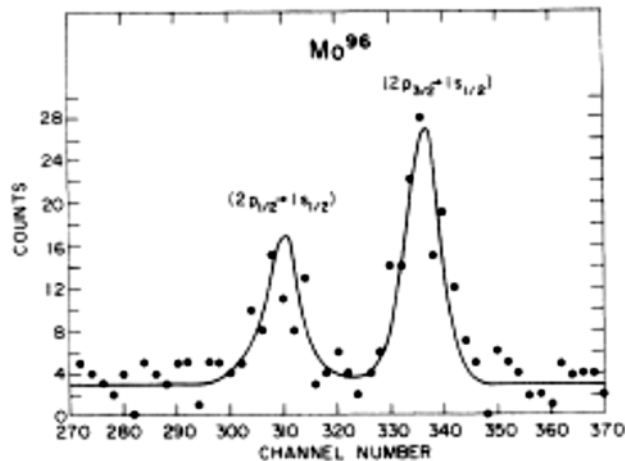
Метод на изотопното отместване

Разновидности

- оптично изотопно отместване ($\Delta E/E_0 \sim 10^{-6}$);
- мюонно К рентгеново изотопно отместване:

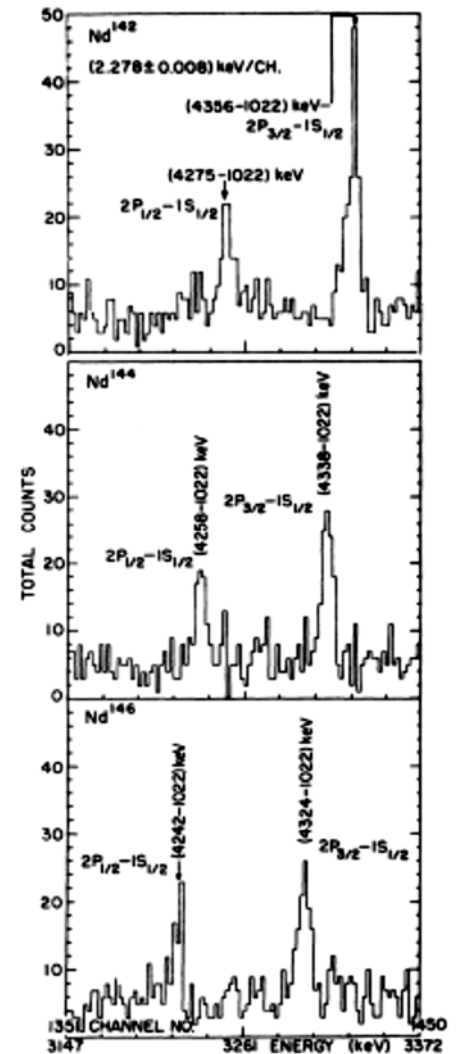
$$E_k(A) - E_k(A') = -\frac{2 Z^4 e^2 R_0^2}{5 4\pi\epsilon_0 a_0^3} (A^{2/3} - A'^{2/3})$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \quad m_\mu = 207 m_e$$



C. Chasman *et al.*,
PRL 14, 718(1965)

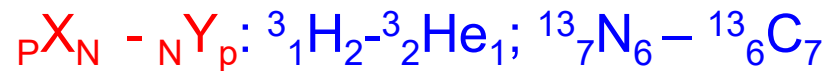
T. T. Bardin *et al.*,
PRL 16, 718(1966)



Метод на изотопното отместване

Разновидности

- оптично изотопно отместване ($\Delta E/E_0 \sim 10^{-6}$);
- мюонно К рентгеново изотопно отместване:
- метод на огледалните ядра



$$E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Delta E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} [Z^2 - (Z-1)^2] = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} [2Z-1]$$

$$Z, \quad N = Z - 1, \quad A = 2Z - 1$$

$$R = R_0 A^{1/3}$$

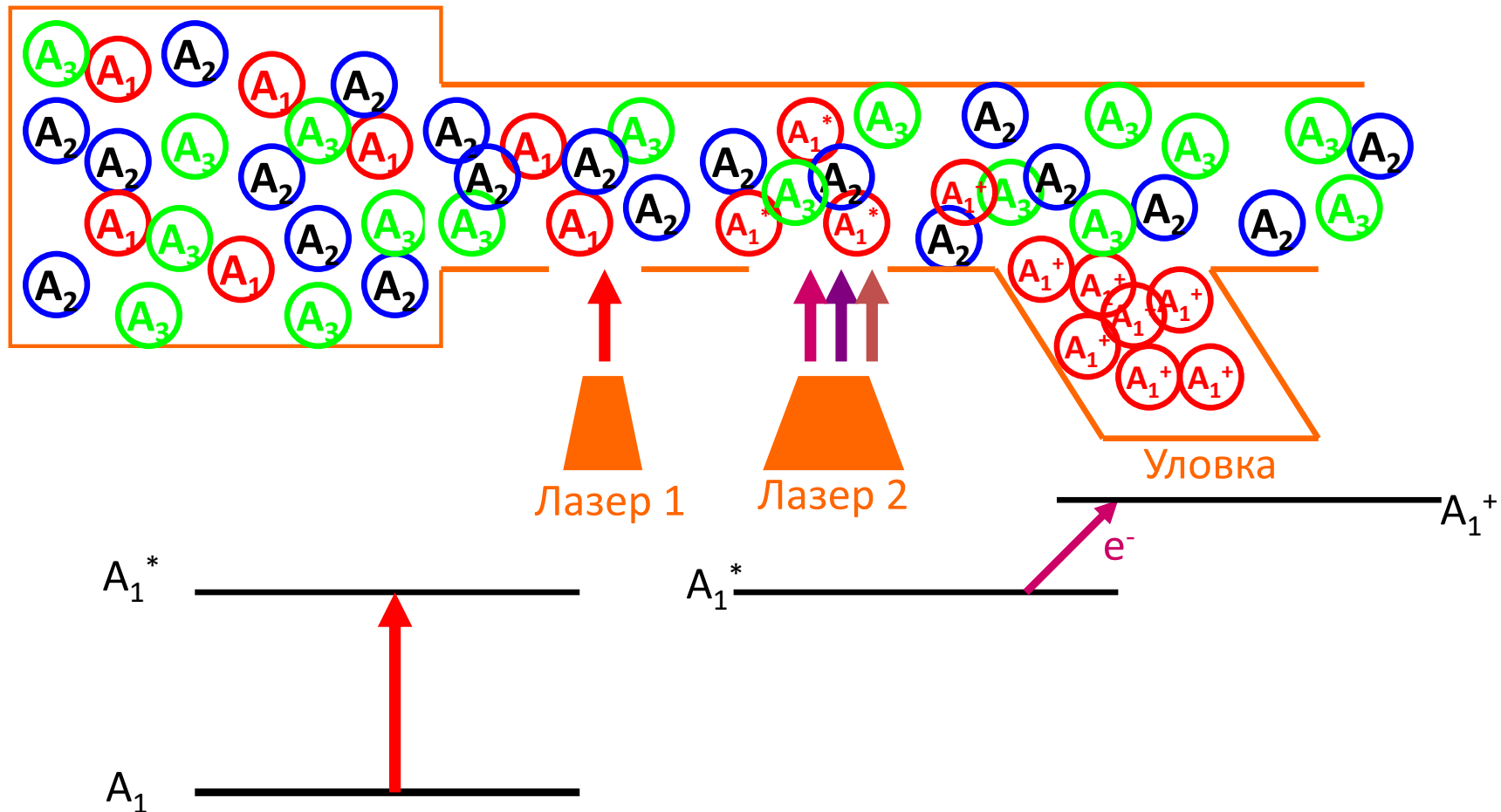
$$= \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} A^{2/3}$$

$$R = R_0 A^{1/3} \quad R_0 = 1.2 \div 1.25 \text{ fm}$$

Лазерен метод за разделяне на изотопи

Източник на
неутрални атоми

$$\Delta E_k(A) = -\frac{2 Z^4 e^2 R_0^2 A^{2/3}}{5 4\pi\epsilon_0 a_0^3}$$



Методи за измерване разпределението на ядрената материя

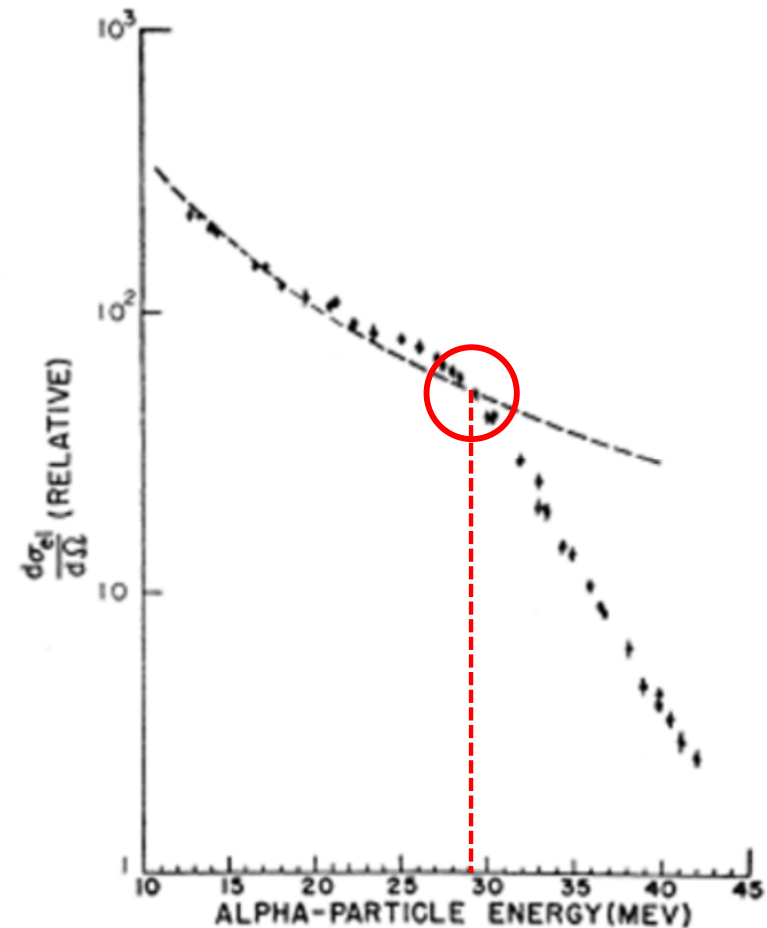
Ръдърфордовско разсейване

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zz'e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

$$b = \frac{Zz'e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot(\theta/2)$$

α -разпад

π -мезонно рентгеново отместване



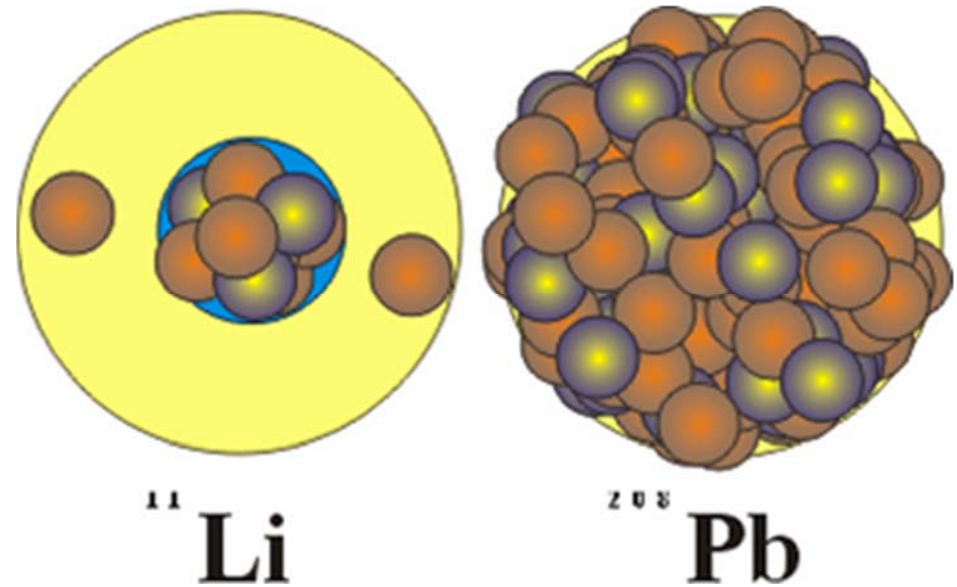
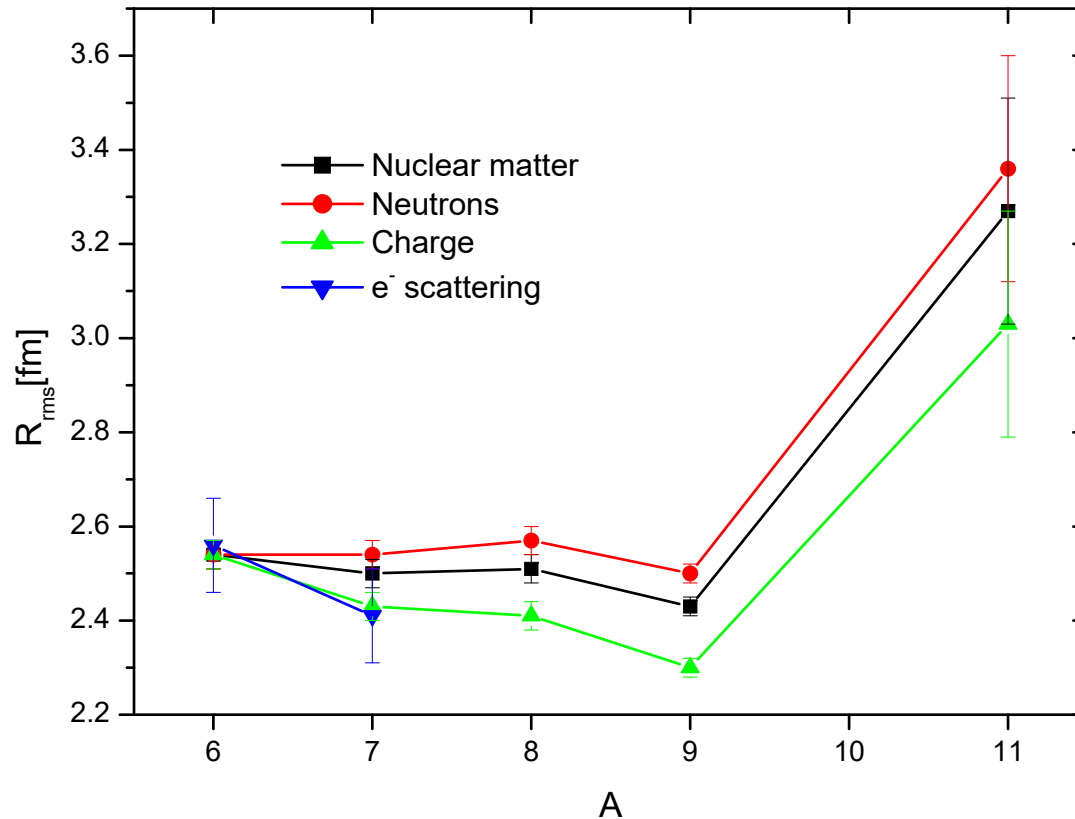
Разпределението на ядрената материя съвпада с плътността на електричните заряди в ядрото!!!

$$R = R_0 A^{1/3}$$

$$R_0 = 1.2 \div 1.25 \text{ fm}$$

Така ли е наистина?

I. Tanihata *et al.*, Phys. Rev. Lett. 55, 2676 (1985)



Към днешна дата
неутронно хало е
наблюдавано до ^{19}C

За ядра далеч от линията на стабилност се наблюдават драстични отклонения от очакваните радиуси, които са свързани с съществуването на неутронно хало и неутронни кожи!

Ядрена маса и енергия на свързване

$$m(N, Z)c^2 = m_{atom}c^2 - Zm_e c^2 + \sum_{i=1}^Z \cancel{B_i^e} \quad \begin{matrix} B_i^e \approx 10 - 100 \text{ keV} \\ m(N, Z) = A \cdot 1000 \text{ MeV} \end{matrix} \quad 10^{-6}$$

$$B(N, Z) = \left(Zm_p + Nm_n - (m_{atom} - Zm_e) \right) c^2$$

$$B(N, Z) = \left(Z(m_p + m_e) + Nm_n - m_A \right)$$

$$B(N, Z) = \left(Zm(^1H) + Nm_n - m_A \right) c^2$$

По дефиниция: $1 \text{ u (amu)} = 1/12 M(^{12}\text{C})$ или $M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ u}$

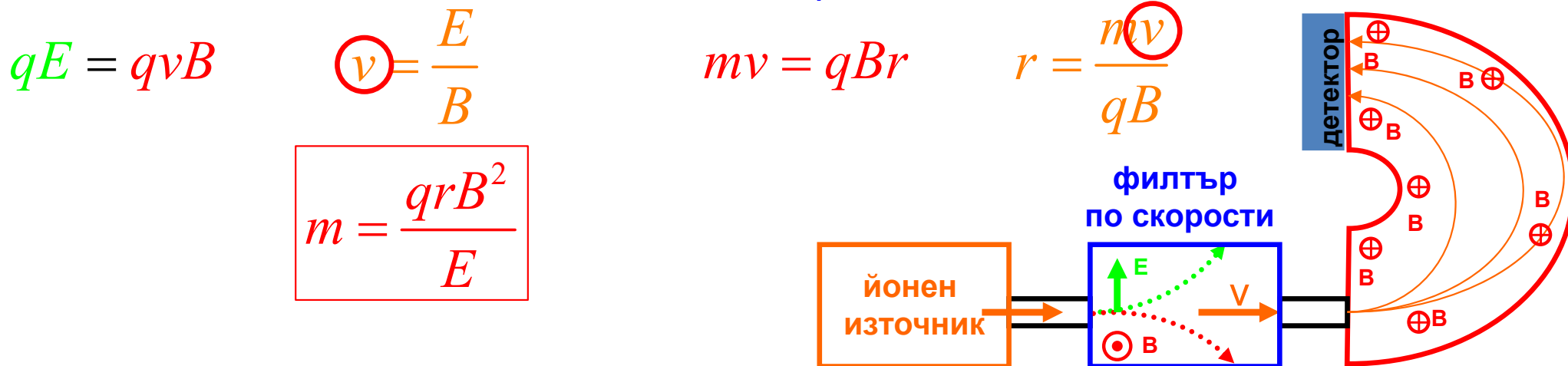
$$\begin{aligned} 1 \text{ u} &= 1.6605 \cdot 10^{-24} \text{ g} \\ c^2 &= 931.494 \text{ MeV/u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_p &= 1.00782503207(10) \text{ u} \\ m_n &= 1.0086649157(6) \text{ u} \end{aligned}$$

Експериментално определяне на ядрените маси

Необходима точност на измерването: 1% за определяне на относителното разпространение и 10^{-6} за определяне на масата!

Мас спектроскопия



Проблем: за директно измерване е необходимо всички параметри да се калибрират с точност $10^{-6} \Rightarrow$ относителни измервания

Метод на масовите дублети

Приемаме $m(^{12}\text{C}) = 12.000000$ u

Калибрираме за маса 128

Измерваме $m(\text{C}_9\text{H}_{20})$ и $m(\text{C}_{10}\text{H}_8) \Rightarrow \Delta = 0.09390032 \pm 0.00000012$

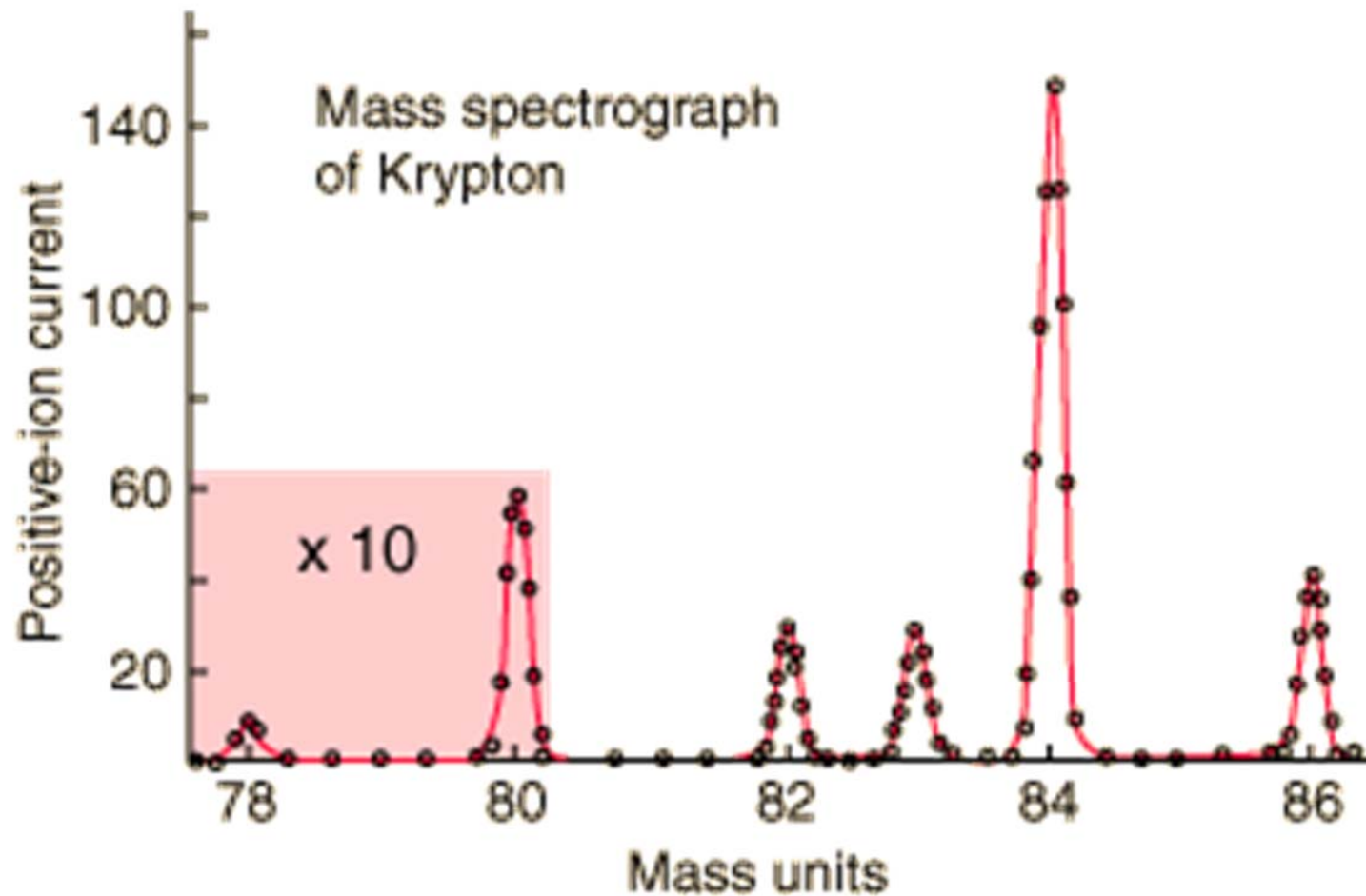
$$\Delta = m(\text{C}_9\text{H}_{20}) - m(\text{C}_{10}\text{H}_8) = 12m(^1\text{H}) - m(^{12}\text{C})$$

$$m(^1\text{H}) = (1/12)[m(^{12}\text{C}) + \Delta] = 1.00782503(1)$$

Калибрираме за маса 28 и прилагаме същата процедура за C_2H_4 и N_2

$$m(^{14}\text{N}) = 14.00307396(2)$$

Разпространение на изотопите



^{78}Kr 0.356%

^{80}Kr 2.27%

^{82}Kr 11.6%

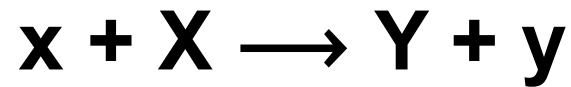
^{83}Kr 11.5%

^{84}Kr 57.0%

^{86}Kr 17.3%

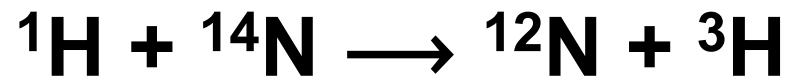
$$m(\text{Kr}) = 0.00365 m(^{78}\text{Kr}) + 0.0227 m(^{80}\text{Kr}) + \dots = 83.8 \text{ u}$$

Енергиен баланс при ядрени реакции



$$m(x) c^2 + m(X) c^2 + T(x) = m(Y) c^2 + m(y) c^2 + T(Y) + T(y)$$

$$Q = [m(x) + m(X) - m(Y) - m(y)] c^2$$

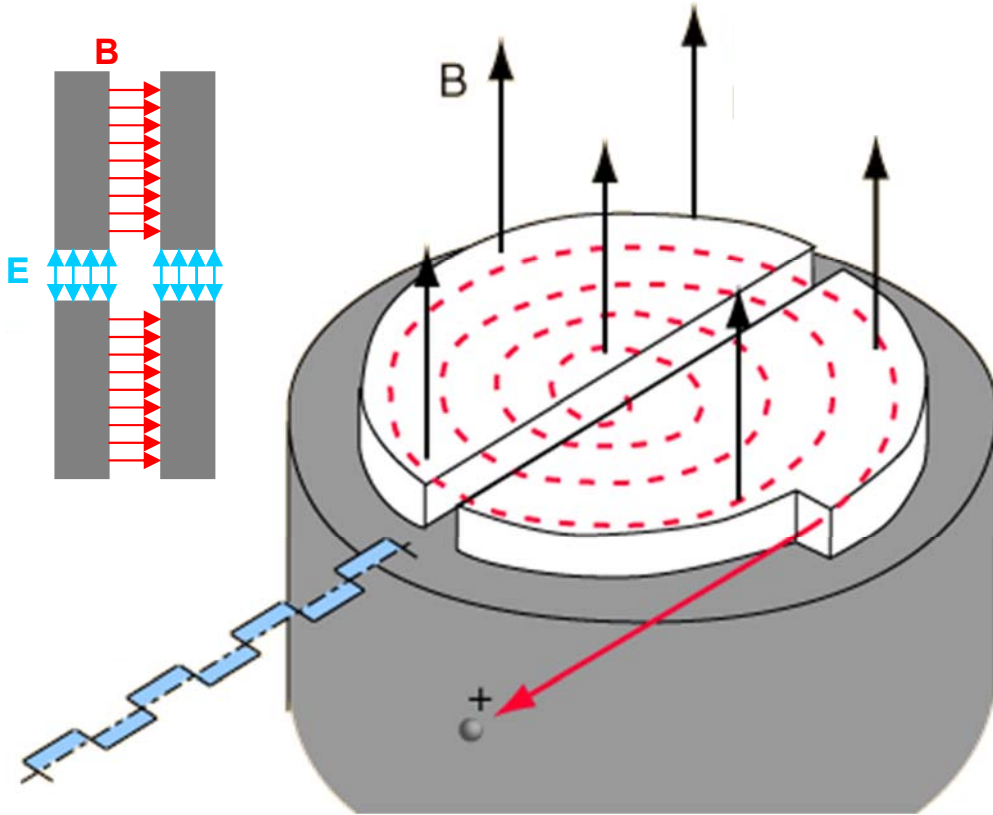


$$m({}^1\text{H}) = 1.007825 \text{ u} \quad m({}^{14}\text{N}) = 14.003074 \text{ u} \quad m({}^3\text{H}) = 3.016049$$

$$Q = -22.1355(10) \text{ MeV}$$

$$m({}^{12}\text{N}) = 12.018613(1) \text{ u}$$

Метод на циклотронната честота



$$\frac{mv^2}{r} = Bqv \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$
$$\omega = 2\pi f_c$$

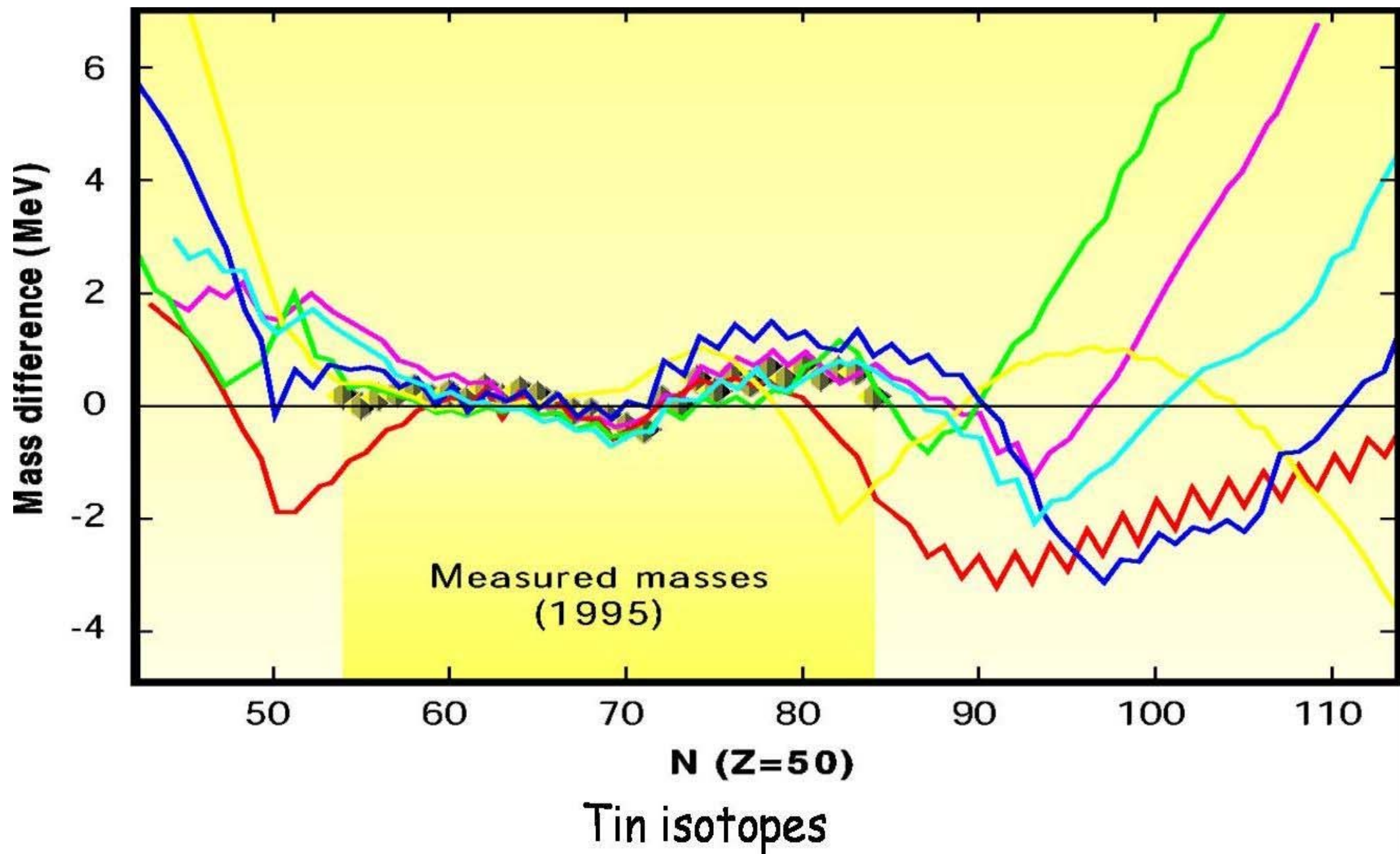
циклотронна
честота

$$f_c = \frac{Bq}{2\pi m}$$

$$f_c\left(\frac{q}{m}\right)$$

- директно измерване на заряда на регистрирания йон (йонизационни камери, Si детектори или телескопи);
- измерване на близки по маси йони, намиращи се в едно и също зарядово състояние: $^{16}\text{O}^+_2$ и $^{32}\text{S}^{++}$;

Защо?

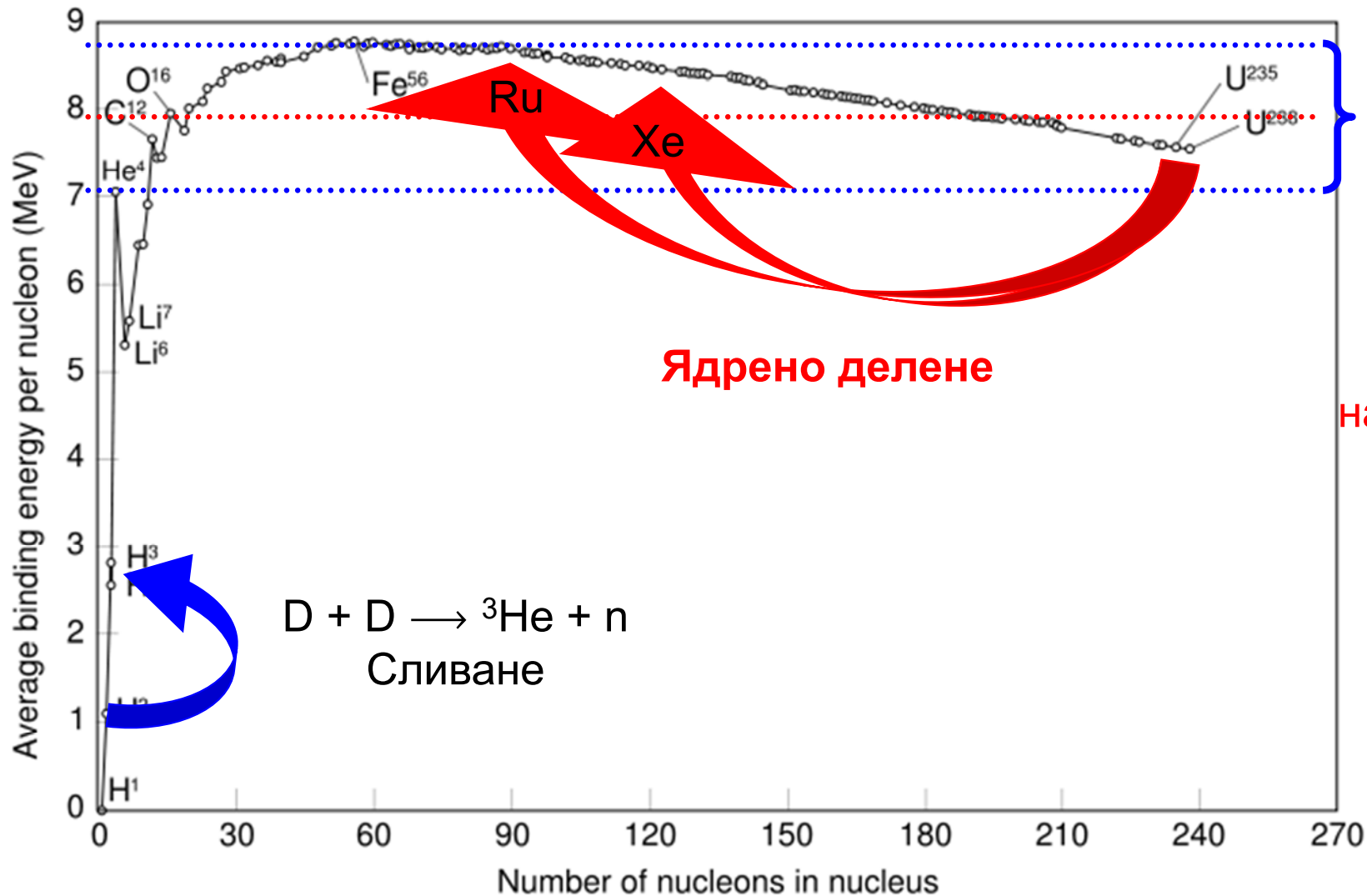


Енергия на свързване

$$m({}_Z^A X_N) = [Zm({}^1\text{H}) + Nm_n - \frac{1}{c^2} B(N, Z)]$$

$$\Delta = (m({}_Z^A X_N) - A)c^2$$

Енергетичния остатък/излишък от образуването на ядрена свързана система



$$B/A \sim \text{const} = 8.0(8) \text{ MeV}$$

~~$$B \sim A(A-1)$$~~

$B \sim A$
най-близки съседи

Полу-емпирична масова формула

1930 Von Weizsäcker → течно-капков модел

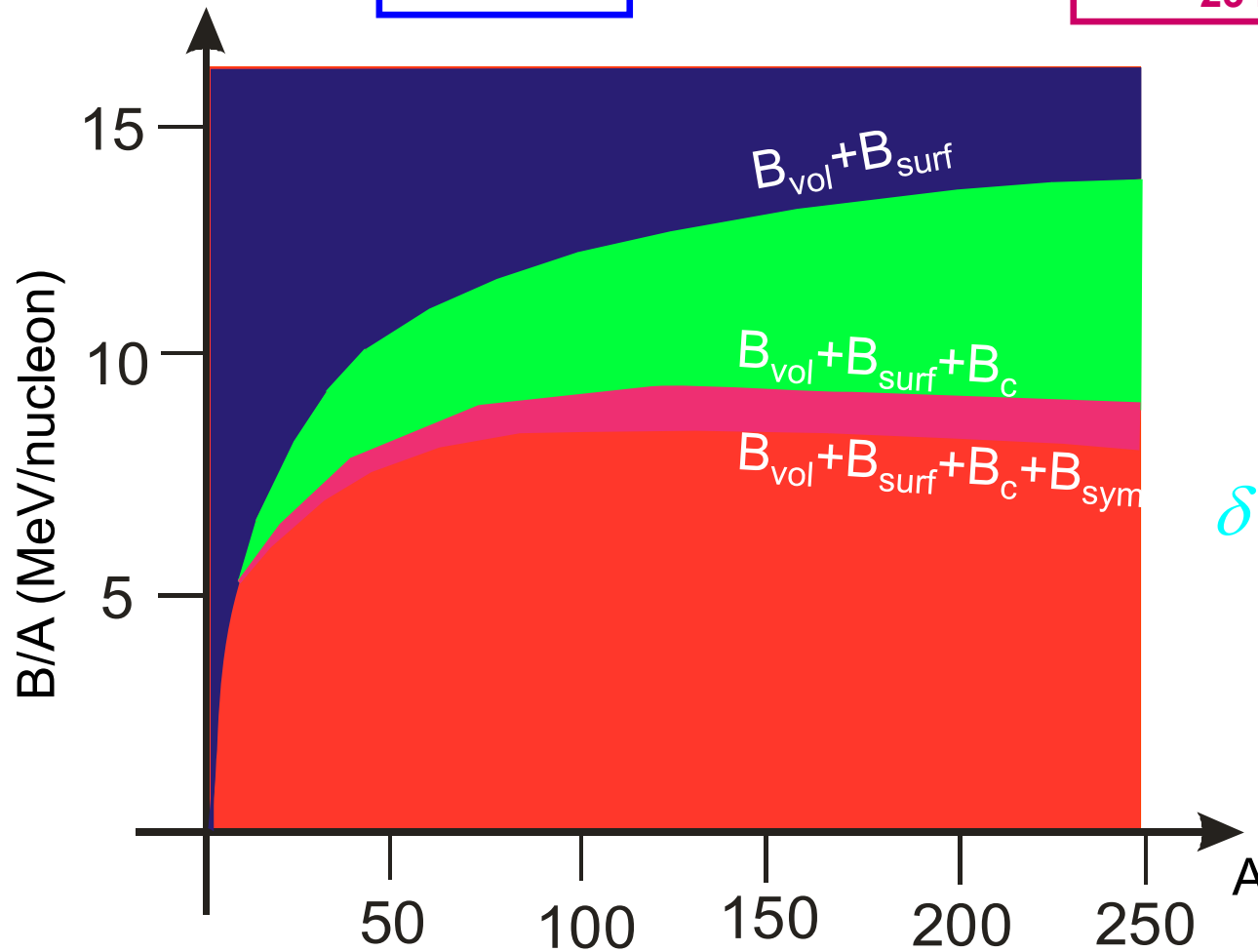
$$B(N, Z) = a_{vol}A - a_{surf}A^{2/3} - \frac{a_c Z(Z-1)A^{-1/3}}{\frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

15.5 MeV

$S \sim R^2 \sim A^{2/3}$
16.8 MeV

0.72 MeV

$Z \sim N$
23 MeV

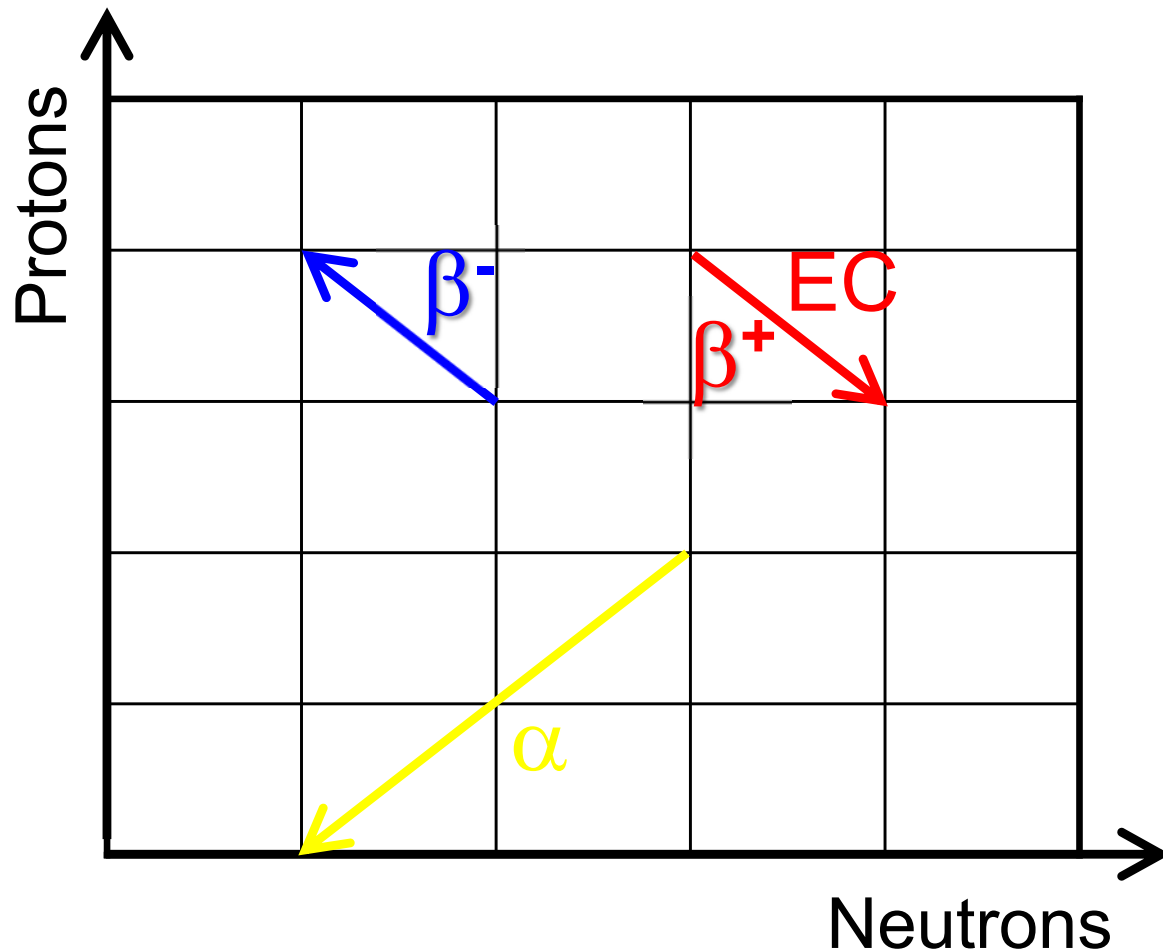


Само 4 стабилни
нечетно-нечетни:
 ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$

$$\delta = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{за четни } Z \text{ и } N \\ 0 & \text{за } Z \text{ или } N \text{ нечетно} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{за нечетни } Z \text{ и } N \end{cases}$$

$a_p = 34 \text{ MeV}$

Ядрени разпади



- γ - разпад
- излъчване на γ
 - $Z, N, A = \text{const}$

α -разпад:

- излъчване на ^4He ядра
- $Z \rightarrow Z-2$
- $N \rightarrow N-2$
- $A \rightarrow A-4$

β^- - разпад:

- излъчване на e^- и $\bar{\nu}_e$
- $Z \rightarrow Z+1$
- $N \rightarrow N-1$
- $A = \text{const}$

β^+ - разпад:

- излъчване на e^+ and ν_e
- $Z \rightarrow Z-1$
- $N \rightarrow N+1$
- $A = \text{const}$

Електронен захват (EC)

- Поглъщане на e^- и излъчване на ν_e
- $Z \rightarrow Z-1$
- $N \rightarrow N+1$
- $A = \text{const}$

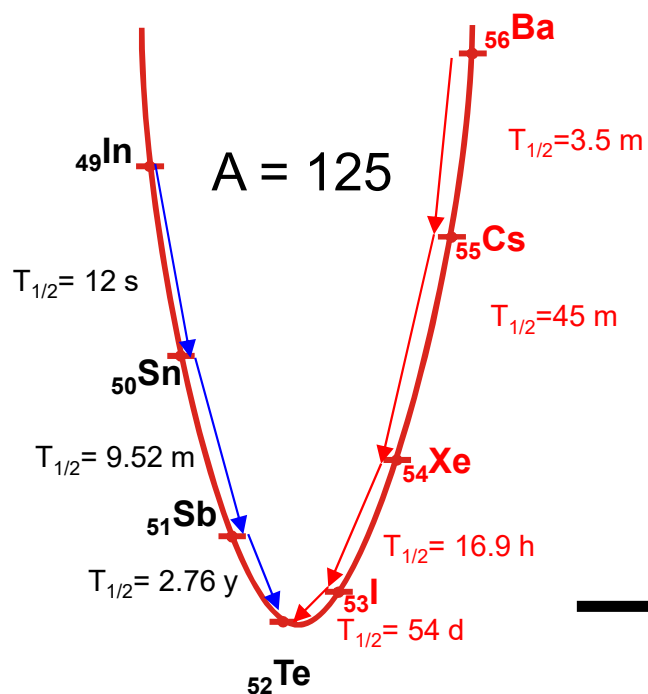
Линия на стабилност

$$m(Z, A) = Zm(^1\text{H}) + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

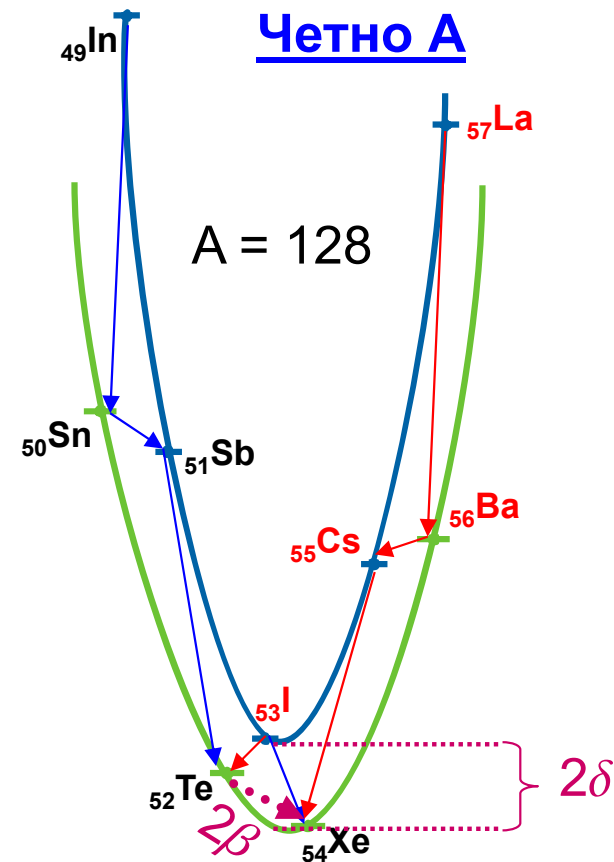
$$\left(\frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} \right)_{A=\text{const}} = 0 \quad Z_{\min} = \frac{[m_n - m(^1\text{H})] + a_c A^{-1/3} + 4a_{\text{sym}}}{2a_c A^{-1/3} + 8a_{\text{sym}} A^{-1}} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} A^{2/3} \frac{a_c}{a_{\text{sym}}}}$$

$$Z_{\min} \xrightarrow{A < 40} \frac{A}{2} \quad Z_{\min} < \frac{A}{2} \quad A > 40$$

Нечетно A



Четно A



Граници на съществуване ядрената материя

