Физика на ядрото и елементарните частици

- проф. дфзн Георги Райновски
- кабинет B25/27
- e-mail: rig@phys.uni-sofia.bg, тел. 728

Introductory Nuclear Physics

Kenneth S. Krane, John Wiley&Sons, Inc. New York, 1988.

Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics

K. Heyde, IoP publishing, Bristol&Philadelphia, 2004

Nuclear structure from a simple perspective

R.F. Casten, Oxford University Press, 2000

Физика на атомните ситеми

Петър Райчев, издателство ЛОДОС, София 2006

Физика на ядрото и елементарните частици

У.С.С. Уилямс, Университетско издателство "Св. Кл. Охридски", София 2000

Увод в теоретичната ядрена физика

Б. Славов, Университетско издателство "Св. Кл. Охридски", София 2002,1992

Ядрена физика, *А. Минкова, 2006*

Изпит: Крайна оценка = 0.20*(Тест 1) + 0.20*(Тест 2) + 0.30*(Задачи) + 0.30*(2 въпроса)

Електронни ресурси

Страница на курса

https://nucleus.phys.uni-sofia.bg/riglectures/

Мудъл (Moodle)

https://elearn.uni-sofia.bg/course/view.php?id=83208

Тиймс (Teams)

https://teams.microsoft.com/l/team/19%3aec3kAZ7M1JX2epx5vCDn3OzWpvTmKJux9fL_CrSm1Ik1%40thread.tacv2/conversations?groupId=395e7d03-d299-49c3-9eff-856653e1e3e1&tenantId=9d05c5fb-e448-4700-8a58-e15b93c84ea9

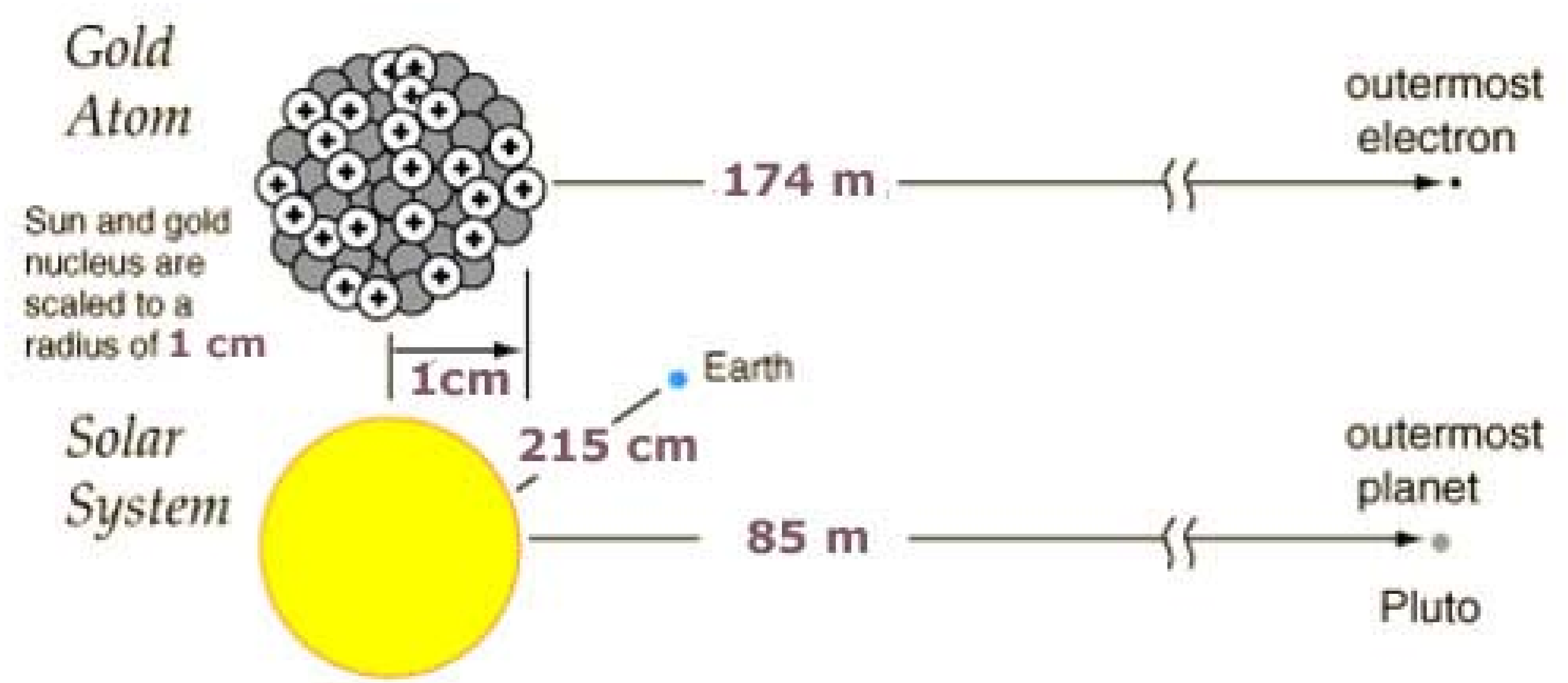
Инструкции за регистрация в Teams
https://www.uni-sofia.bg/index.php/bul/universitet_t/fakulteti/fizicheski_fakultet2/v_treshni_resursi/it_su/licenzi_microsoft_office_365_za_produkti_i_uslugi

Основни термини, величини и размерности в ядрената физика.

Скала на размерите в микросвета

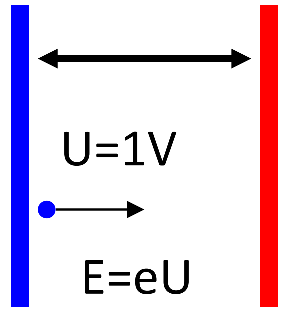
$$R = 1.2\ [\mathrm{fm}]\mathrm{A}^{1/3}$$

$$R(^{197}\mathrm{Au}) \approx 7\ \mathrm{fm} = 7 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$



Единици за енергия

- Енергия $1\ \mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$



Типичните енергии за γ и β разпадания са ~ 1MeV,
за α разпади ~ 6 MeV

100 W ел. Крушка, за 1 час ще отдели:

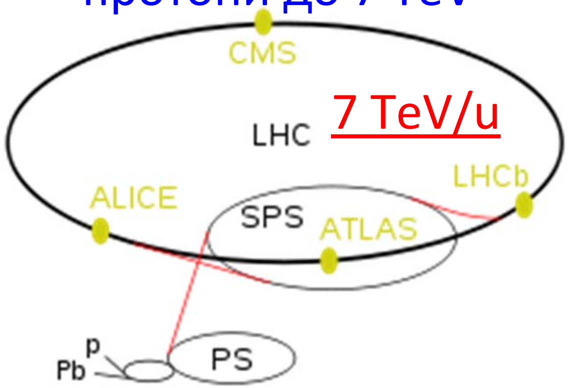
$$E = P.t = 100\ \mathrm{W}.(60\times 60)\ \mathrm{s} = 360000\ \mathrm{J}$$

$$= (3.6\times 10^{5}\ \mathrm{J})/(1.602\times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}) = 2.25\times 10^{24}\ \mathrm{eV} = 2.25\ \mathrm{YeV}$$

- Температурен еквивалент

$$\frac{1\mathrm{eV}}{k_B} = \frac{1.60217653(14)10^{-19}\ \mathrm{J}}{1.3806505(24)10^{-23}\ \mathrm{J/K}} = 11604.505(20)\mathrm{K} \propto 10^{4}\mathrm{K}$$

Large Hadron Collider
протони до 7 TeV



Мравка тежаща 1 g се движи със скорост 5 cm/s

$$E = mv^2/2 = (10^{-3}\ \mathrm{kg})(5\times 10^{-2}\ \mathrm{m/s})/2 = 1.25\times 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

$$= 1.25\times 10^{-6}\ \mathrm{J}/1.602\times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV} = 0.78\times 10^{13}\ \mathrm{eV} = 7.8\ \mathrm{TeV}$$

Колко нуклеона има в една мравка (от C)?

$$\#(C) = \frac{1\mathrm{g}}{12} 6.022\times 10^{23} = 5\times 10^{22}$$

$$E/u = 1.6\times 10^{-9}\ \mathrm{eV/u}$$

$$N_A = 6.022\times 10^{23}\ \mathrm{mol/g} \qquad \#(p) + \#(n) = (6+6)\times \#(C) = 5\times 10^{23}$$

- 1/40 eV – топлината енергия при стайна температура
- 13.6 eV – йонизационната енергия на водорода
- 200 MeV – средната енергия отделяна при деленето едно ядро ^{235}U
- 210 MeV – средната енергия отделяна при деленето едно ядро ^{239}Pu

Единици за енергия

Температурен ефект на освободената при разпад енергия

$^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + \alpha$ $\quad E_\alpha \approx 4$ MeV $\quad$ 200g H_2O

Колко грама ^{238}U са необходими за да се загрее даденото количество вода до 100°C? Каква е плътността на отделяната топлинна енергия за единица време?

$$Q = \Delta T c(H_2O) m(H_2O)$$

$$c(H_2O) = 4.1855 \text{ J/gK}$$

$$\Delta T = (100 - 20)^\circ \text{ C}$$

$$Q = 6.7 \times 10^4 \text{ J}$$

$$E_\alpha = 4 \text{ MeV} = 4 \times 1.6 \times 10^{-13} \text{ J} = 6.4 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\frac{Q}{E_\alpha} = \frac{6.7 \times 10^4}{6.4 \times 10^{-13}} = 10^{17} \alpha\text{'s} \quad \rightarrow 10^{17} \ {}^{238}\text{U}$$

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$$

$$m = \frac{10^{17}}{6.022 \times 10^{23}} 238 = 40 \times 10^{-6} \text{ g} = 40 \ \mu\text{g}$$

1kg $H_2O \rightarrow 200$ μg ^{238}U $\quad$ 1t $H_2O \rightarrow 200$ mg ^{238}U $\quad$ 5t $H_2O \rightarrow 1$ g ^{238}U

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{ln2}{T_{1/2}}$$

$$T_{1/2}({}^{238}\text{U}) = 4.468 \times 10^9 \text{ y}$$

$$\lambda({}^{238}\text{U}) = 1.5 \times 10^{-8} \text{y}^{-1}$$

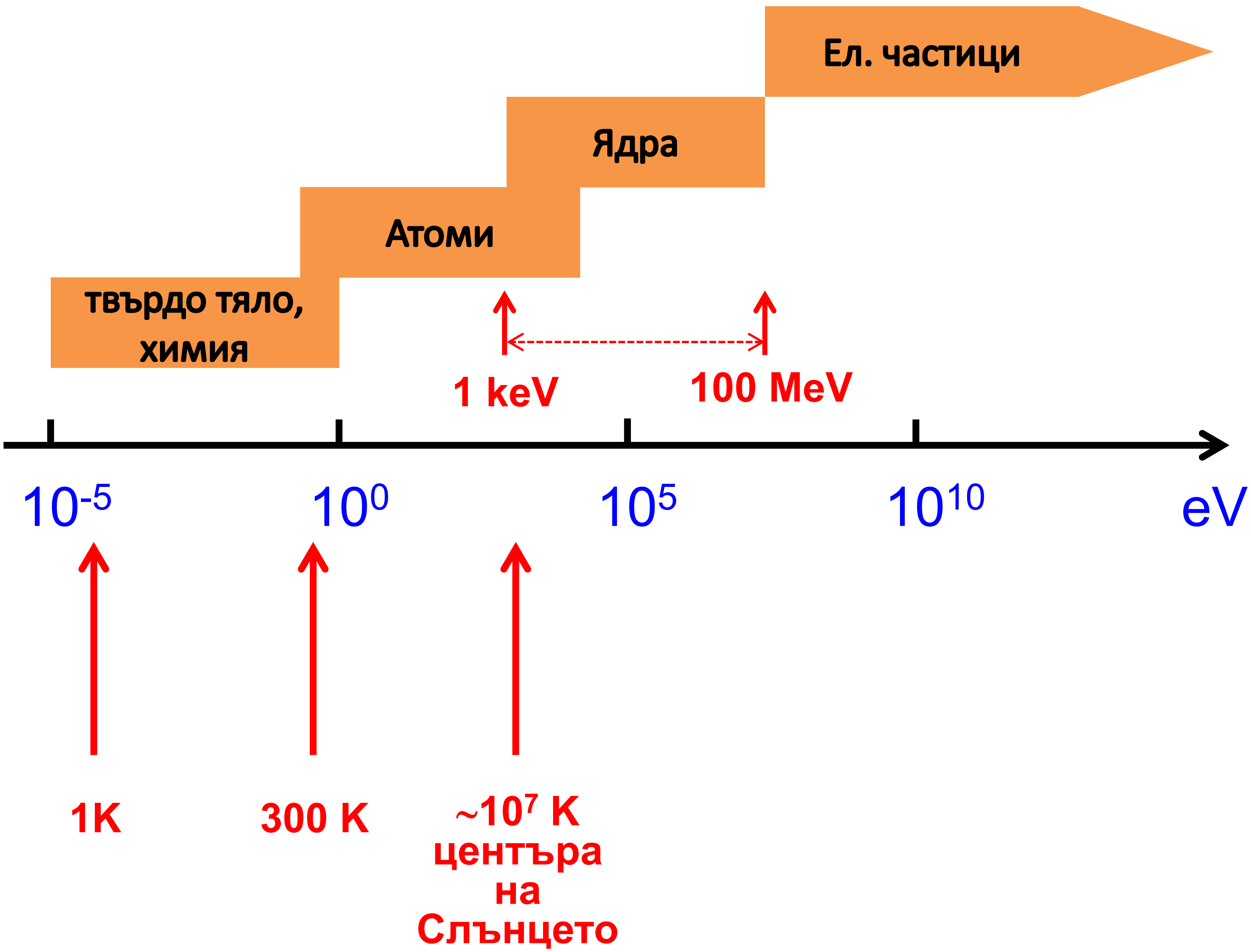
$$A = \lambda N = 1.5 \times 10^{-8} \text{ y}^{-1} 10^{17} = 1.5 \times 10^9 \text{r/y}$$

$$\rightarrow 6 \times 10^9 \text{MeV/y} \approx 1 \times 10^{-3} \text{J/y}$$

1 eV = 1.602 × 10^{-19} J

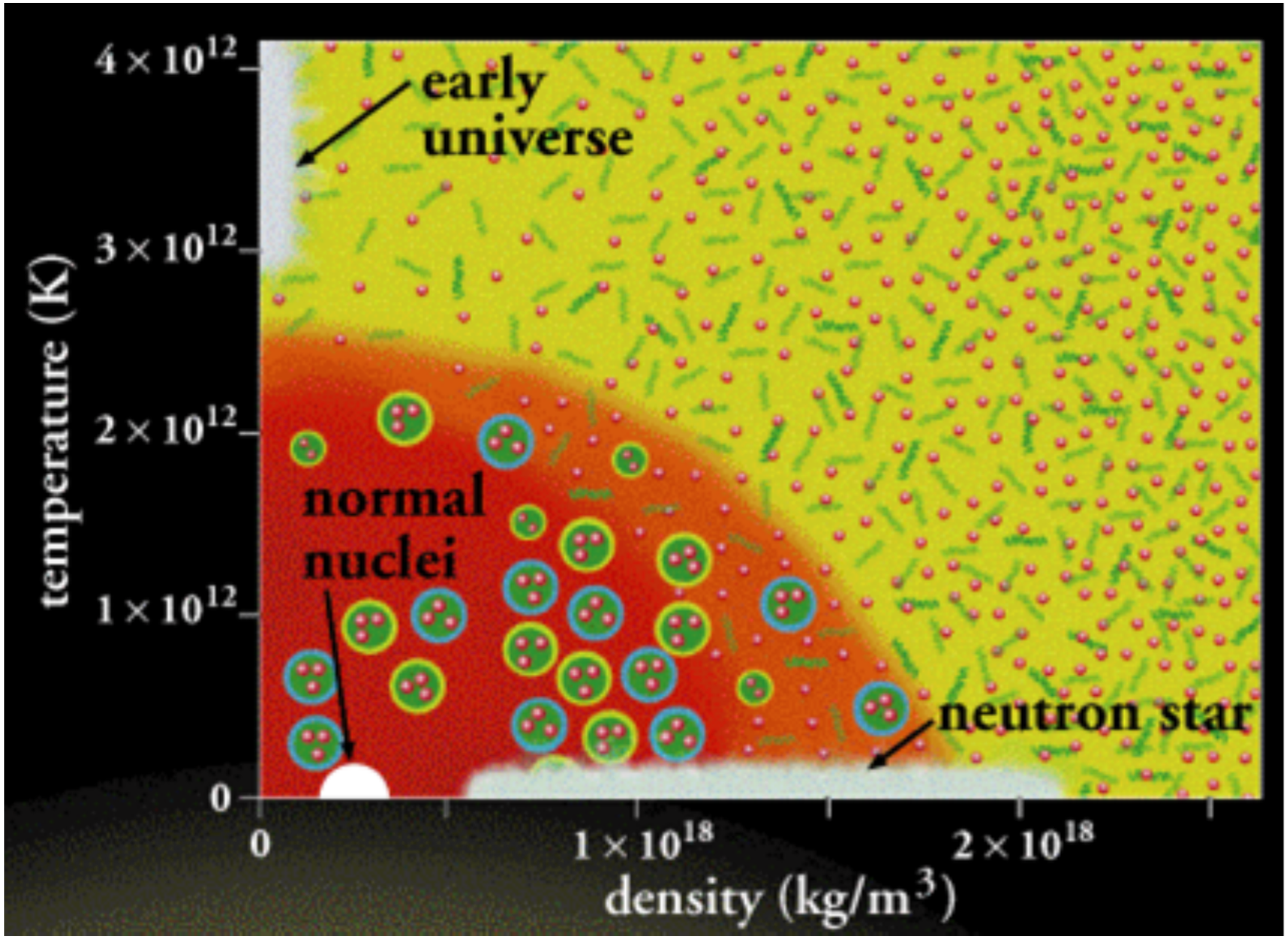
t = 6.7 10^7 y

Енергетична скала в ядрената физика



Плътност на ядрената материя

$$\rho = \frac{M_N}{\frac{4\pi}{3} R_N^3} = \frac{A m_n}{\frac{4\pi}{3}(1.2\text{fm}\, A^{1/3})^3} = \frac{m_n}{7.2\text{fm}^3} = \frac{1.66\times10^{-27}\,\text{kg}}{7.2\times10^{-45}\,\text{m}} = 2.3\times10^{17}\,\text{kg/m}^3$$



Основни означения

1932 - Chadwick – открива неутрона – електрически неутрална частица с маса

$m_n \approx m_p$ (m_p= 938.272 MeV, m_n= 939.566 MeV, Δm=1.293 MeV)

{протон, неутрон}≡нуклеон

ЯДРО ≡ Z, N, A=N+Z

$${}^{A}_{Z}X_{N} \qquad X \equiv Z \qquad {}^{A}X_{N} \qquad A=N+Z \qquad {}^{A}X$$

$${}^{238}_{92}U_{146} \qquad U \equiv 92 \qquad {}^{238}U_{146} \qquad 238=146+92 \qquad {}^{238}U$$

Z – константа – изотопи (${}^{112}Sn$, ${}^{114}Sn$, ${}^{115}Sn$, ${}^{116}Sn$, ${}^{118}Sn$, ${}^{120}Sn$)

N – константа – изотони (${}^{132}Te$, ${}^{134}Xe$, ${}^{136}Ba$, ${}^{138}Ce$)

Основни свойства на ядрата

- маса – измерва се в обобщени атомни маси (относителна единица):

  $m(^{12}C) = 12u \Longrightarrow 1u = 931.502\ MeV$;

- радиус – типичните разстояния в ядрото $\propto 10^{-15}\ m = 1\ fm$ (1 Fermi);

- относително разпространение на изотопите (за стабилните нуклиди);

- канали на разпад и времена на полуразпад (за радиоактивните нуклиди):

➢ α разпад - $^{A}_{Z}X_{N} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2} + {}^{4}_{2}He_{2}$

$E_{\alpha} \approx 5\ MeV,\ T_{1/2} \approx \min \div \mu s$, но

$T_{1/2}(^{238}U) = 4.46 \times 10^{9}\ y,\ T_{1/2}(^{232}Th) = 1.4 \times 10^{10}\ y$

➢ β разпад - $^{A}_{Z}X_{N} \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y_{N-1} + e^{-} + \tilde{\nu}_{e}$ β - минус $^{140}_{54}Xe_{86} \longrightarrow {}^{140}_{55}Cs_{85} + e^{-} + \tilde{\nu}_{e}$

$^{A}_{Z}X_{N} \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y_{N+1} + e^{+} + \nu_{e}$ β - плюс $^{44}_{22}Ti_{22} \longrightarrow {}^{44}_{21}Sc_{23} + e^{+} + \nu_{e}$

$^{A}_{Z}X_{N} + e^{-} \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y_{N+1} + \nu_{e}$ ЕЗ $^{94}_{44}Ru_{50} + e^{-} \longrightarrow {}^{94}_{43}Tc_{51} + \nu_{e}$

$E_{\beta} \leq 1\ MeV,\ T_{1/2} \approx ms \div days$,

Основни свойства на ядрата

- γ разпад - електромагнитно лъчение

  $E_\gamma \approx 0.05 \div 20$ MeV, $T_{1/2} \approx$ ns ÷ fs, но

  съществуват и така наречените ядрени изомери:

  $T_{1/2}(^{99}Tc) = 6.02$ h, $T_{1/2}(^{95}Tc) = 61$ days

  $T_{1/2}(^{180}Ta) = 1.2 \times 10^{15}$ y, $T_{1/2}(^{178}Hf) = 31$ y

α разпад	β разпад	γ разпад
силно ядрено взаимодействие	**слабо ядрено взаимодействие**	**електромагнитно взаимодействие**

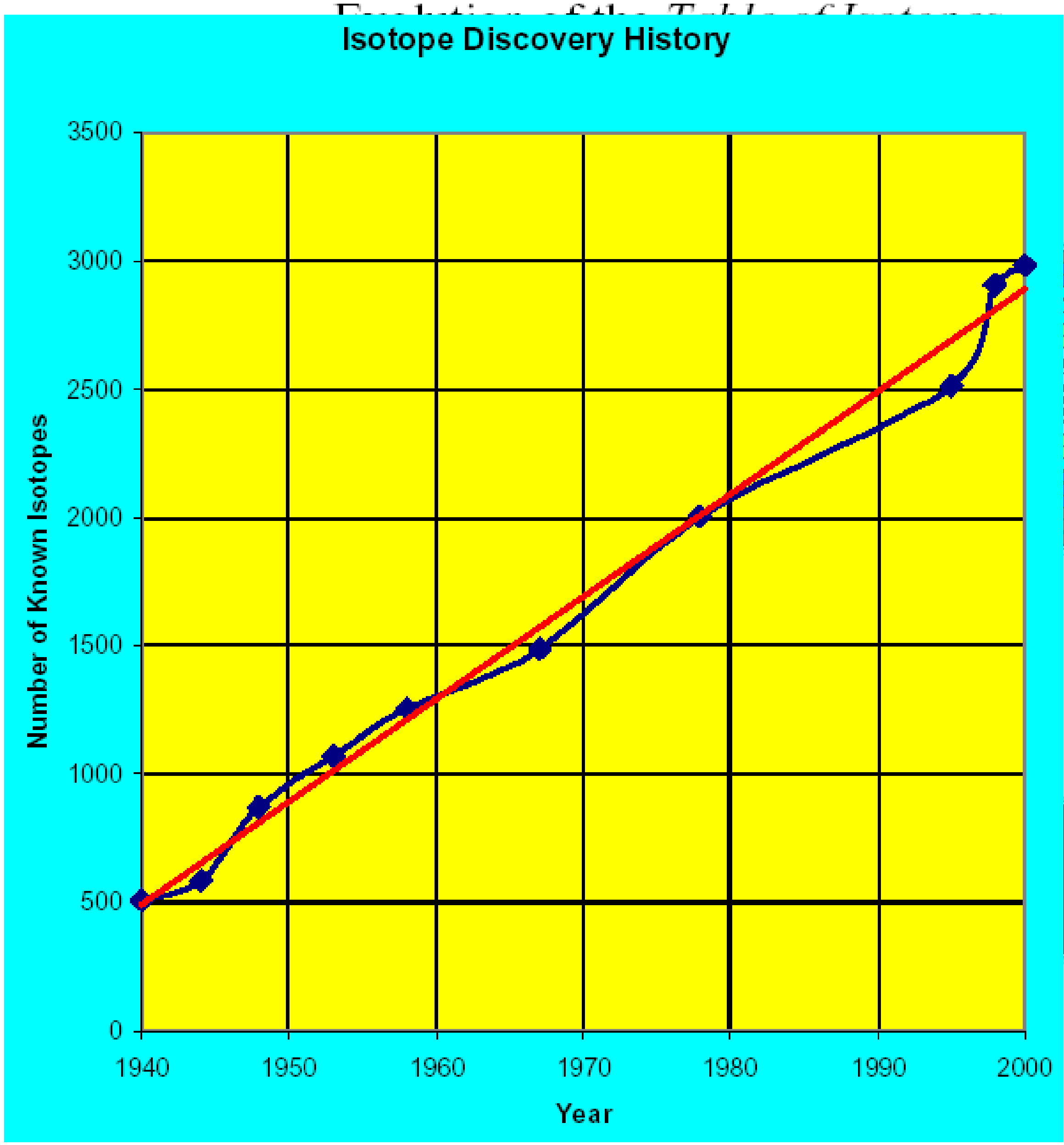
- спонтанно делене - $^{A}X \longrightarrow {}^{A1}Y + {}^{A2}Z + Nn$, $A > 230$
- редки разпади - с излъчване на един, два протона ($^{113}Cs \longrightarrow {}^{112}Xe + p$), неутрон ($^{13}Be \longrightarrow {}^{12}Be + n$), ядрени клъстери ^{8}Be, ^{12}C, ^{16}O ($^{114}Ba \longrightarrow {}^{102}Sn + {}^{12}C$);

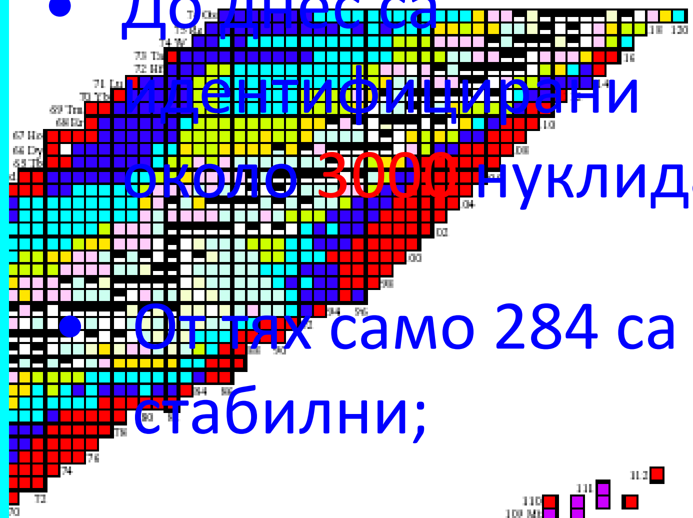
- възможни реакции и сечения за тях
- възбудени състояния – енергия на възбуждане, спин, вероятности за електромагнитни преходи между тях, мултиполни моменти;

Фундаментални взаимодействия

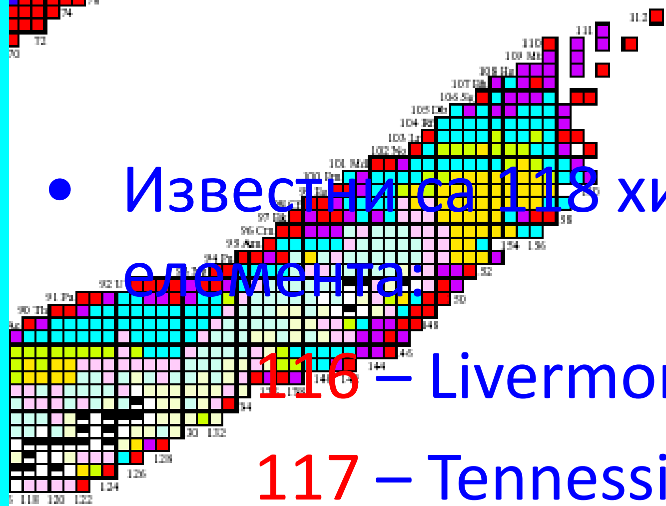
Взаимодействие	Проявление	Сила	Обсег	Преносител
Силно ядрено	Свързва протоните и неутроните в ядро	1	10^{-15} m	глуони m=0 spin=1
Електромагнитно	Обуславя взаимодействието м/у заредени частици	1/137	∞	Фотон m = 0 spin = 1
Слабо ядрено	β-разпад	10^{-6}	10^{-18} m (0.1%D(p))	Векторни бозони W^+, W^-, Z^0 m > 80 GeV spin = 1
Гравитация	Обуславя взаимодействието м/у масови обекти	6×10^{-34}	∞	гравитон(??) $m_g<1.2\times10^{-22}$ eV spin = 2

Карта на нуклидите





- До днес са идентифицирани около 3000 нуклида;
- От тях само 284 са стабилни;



- Известни са 118 химични елемента:

  116 – Livermorium

  117 – Tennessine

  118 – Oganesson

Елементи на квантовата механика. Примери.

Вълнова функция и вероятността интерпретация

1) Движението на квантова частица се описва с вълнова функция $\Psi(\vec{r},t)$;

2) Вероятността за откриване на квантовата частица, която се описва от $\Psi(\vec{r},t)$ в момент t, в елементарен обем d^3r около точка $\vec{r}$, се дава от квадрата на модула на вълнова функция:

$$P(\vec{r},t)d^3r = \Psi(\vec{r},t)^*\Psi(\vec{r},t)d^3r$$

3) Вълновата функция $\Psi(\vec{r},t)$ може да се представи като сума от вълни Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3,…, всяка от които описва определено състояние на движението:

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_i C_i \Psi_i$$

$|C_i|^2$ - вероятност частицата да бъде открита в във състояние на движение, описвано от Ψ_i

Съотношения за неопределеност на Хайзенберг

Какво е положението на частица с маса m и импулс $\vec{p}$ ако я разглеждаме като вълна?

$$\Psi(\vec{r},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{r}-E.t)} \qquad P(r,t)d^3r = |Ae^{\frac{i}{\hbar}(p.r-E.t)}|^2 d^3r = |A|^2 d^3r$$

Не зависи от $\vec{r}$ $\Longrightarrow$ всички точки в пространството са равновероятни!

Какъв е импулсът $\vec{p}$ на частица с маса m, локализирана в точка, ако я разглеждаме като вълна?

Безсмислен въпрос! $\lambda = h/p$ Каква е дължината на вълната в точка?!

Едновременното познаване на $\vec{p}$ и $\vec{r}$ за квантовите системи е невъзможно – точното измерване на една от тези величини внася неопределеност в другата!

Съотношения за неопределеност на Хайзенберг:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \qquad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \qquad \Delta l_z \Delta \varphi \geq \hbar/2$$

$$|\Psi(\vec{r})| \neq 0, \Psi(\vec{r}) \neq 0$$

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z$$

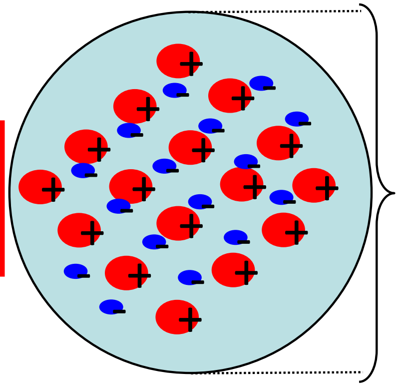
$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(\vec{k}) e^{\vec{k}.\vec{r}} d^3r \qquad A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}.\vec{r}} d^3r$$

$$|A(\vec{k})|^2$$

$$\Delta k_x, \quad \Delta k_y, \quad \Delta k_z$$

Модел на Томпсън

- заряд – $+Ze$ – "Z" атомен номер, $e=1.602189\times10^{-19}$ C
- масово число – A - $m_p \cong 2000 m_e$, $A > 2.Z$



$\Delta x \approx 10^{-14} m \Longrightarrow \Delta p \approx \hbar/\Delta x$

$\hbar = 6.58\text{x}10^{-22}$ MeV s

$\Delta p \approx 6.58\text{x}10^{-8}$ Mev s/m=

=20 Mev/c

A протони+*(A-Z)* ядрени електрони
Маса $\cong$ A.m_p ($m_p \cong 2000 m_e$)   Заряд $\cong$ +Z.e

Проблеми:

- изисква взаимодействие м/у електрони и протони, което да е по силно от кулоновото, но няма експериментална индикация за съществуването на подобно;

- предполага наличието на разпадни електрони с енергия 20 MeV – никога не са наблюдавани такива;

- предсказва неправилно спина на ядрата с нечетно A-Z; Пример: деутрон ^{2}H, A=2 $\Longrightarrow$ има 2 протона и 1 ядрен електрон $\Longrightarrow$ възможни спинове 1/2 или 3/2 докато експериментално установения спин е 1;

- предсказва неправилно магнитния диполен момент - за ядра с не сдвоени електрони той ще бъде $\propto$ $\mu_B = e\hbar/2m_e = 9.27\text{x}10^{-24}$ JT^{-1}, но експериментално е известно, че ядрения магнитен диполен момент е $\propto$ $\mu_N = e\hbar/2m_p = 5.05\text{x}10^{-27}$ JT^{-1}, т.е 2000 пъти по-малък;

4) Вълновата функция $\Psi(\vec{r},t)$ се определя от уравнението на Шродингер;

$$\Psi(\vec{r},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{r}-E.t)} \qquad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = E\Psi \qquad -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} = p_x\Psi$$

$$-i\hbar\nabla\Psi = \vec{p}\Psi$$

$$(-i\hbar\nabla)\Psi = (\vec{p})\Psi$$

$$-\hbar^2\nabla^2\Psi = (\vec{p})^2\Psi$$

$$E = \frac{(\vec{p})^2}{2m} \qquad E = \frac{1}{\Psi}i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{(\vec{p})^2}{2m} = -\frac{1}{\Psi}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi \qquad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$

$$E = \frac{(\vec{p})^2}{2m} + U(\vec{r}) \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r})]\Psi(\vec{r},t) \equiv \hat{H}(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)$$

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\hbar\nabla, \quad \vec{r} \to \vec{r}$$

5) На всяка физична величина се съпоставя линеен ермитов оператор. Стойностите, които физичните величини могат вземат, са собствените стойности на съответните им оператори. Между тези операторите съществуват същите съотношения и тъждества, както м/у физическите величини в класическата механика.

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \qquad \hat{\vec{L}} = -i\hbar\hat{\vec{r}}\times\nabla$$

$$\{q_i, p_k\} = \delta_{ik} \qquad [\hat{r}_i, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{ik}$$

Ако два оператора комутират, те имат обща система от собствени вектори!

Съотношения за неопределеност на Хайзенберг:

$$[\hat{A},\hat{B}] = -i\hbar\hat{C} \qquad \Delta A\Delta B \geq \frac{\hbar}{2}|\hat{C}| \qquad \Delta x\Delta p_x \geq \hbar/2$$

Едномерен случай

Нерелативистично приближение $\longrightarrow$ уравнение на Шродингер – частица с маса m в потенциал V(x)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)]\Psi(x,t) \equiv \hat{\mathrm{H}}\Psi(x,t)$$

$$\Psi(x,t) = \psi(x)T(t) \qquad \Rightarrow \frac{1}{\psi}[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)] = \frac{i\hbar\frac{d}{dt}T(t)}{T(t)} = E$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)]\psi(x) = E\psi(x) \qquad H\psi(x) = E\psi(x)$$

задача за собствени вектори $\{\psi_n(\mathrm{x})\}$ и стойности $\{E_n\}$

$$i\hbar\frac{d}{dt}T(t) = ET(t) \qquad T(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

от граничните условия $\Longrightarrow$

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\psi(a+\epsilon) - \psi(a-\epsilon)] = 0$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=a+\epsilon} - \left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=a-\epsilon}\right] = 0$$

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} = \sum_n c_n \psi(x)_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \qquad P(x_1,x_2,t)dx = \int_{x_1}^{x_2}\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1 \qquad \langle f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)f\Psi(x,t)dx$$

Свободна частица V(x)=0

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}, k^2=2mE/\hbar^2$$

$$\psi(x)=A'\sin(kx)+B'\cos(kx)$$

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)}$$

Уравнение на непрекъснатост $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\ j=0$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(\vec{r})\psi \qquad \psi^*$$

$$-$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^*+V(\vec{r})\psi^* \qquad \psi$$

$$i\hbar(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t})=-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*\Delta\psi-\psi\Delta\psi^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)=\frac{i\hbar}{2m}div(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$$

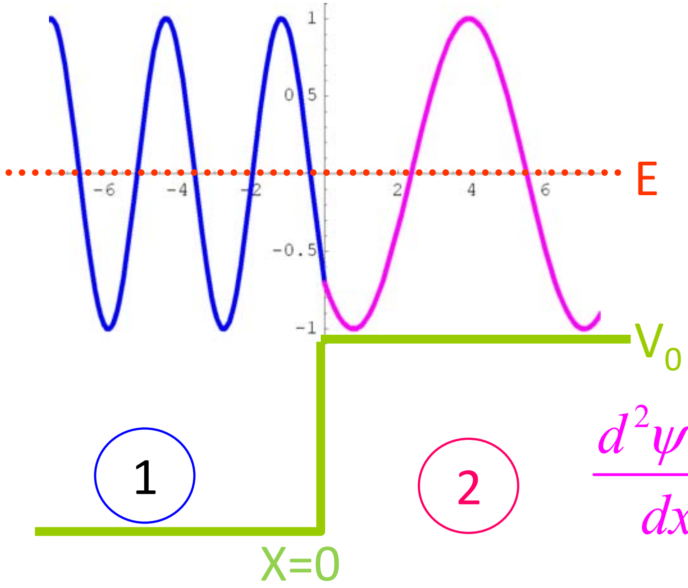
$$j=\frac{\hbar}{i2m}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x})$$

Нормиране

приемаме, че в x=-∞ имаме източник на частици с интензитет *I* (p/s) $\Longrightarrow$ B=0

$$j=\frac{\hbar k}{m}|A|^2 \qquad A=\sqrt{mI/\hbar k}$$

Стъпков потенциал, $E>V_0$



$$V(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ V_0 & x>0\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=A.e^{ik_1x}+B.e^{-ik_1x}$$

$$k_1=\sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

$$\psi_2(x)=C.e^{ik_2x}+D.e^{-ik_2x}$$

$$k_2=\sqrt{2m(E-V_0)/\hbar^2}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\psi(a+\epsilon)-\psi(a-\epsilon)]=0 \qquad A+B=C+D$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=a+\epsilon}-\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=a-\epsilon}\right]=0 \qquad k_1(A-B)=k_2(C-D)$$

“A” – падаща вълна “B” – отразена вълна “C” – преминала вълна D=0

$$B=A\frac{1-k_2/k_1}{1+k_2/k_1} \qquad C=A\frac{2}{1+k_2/k_1}$$

Коефициент на отражение

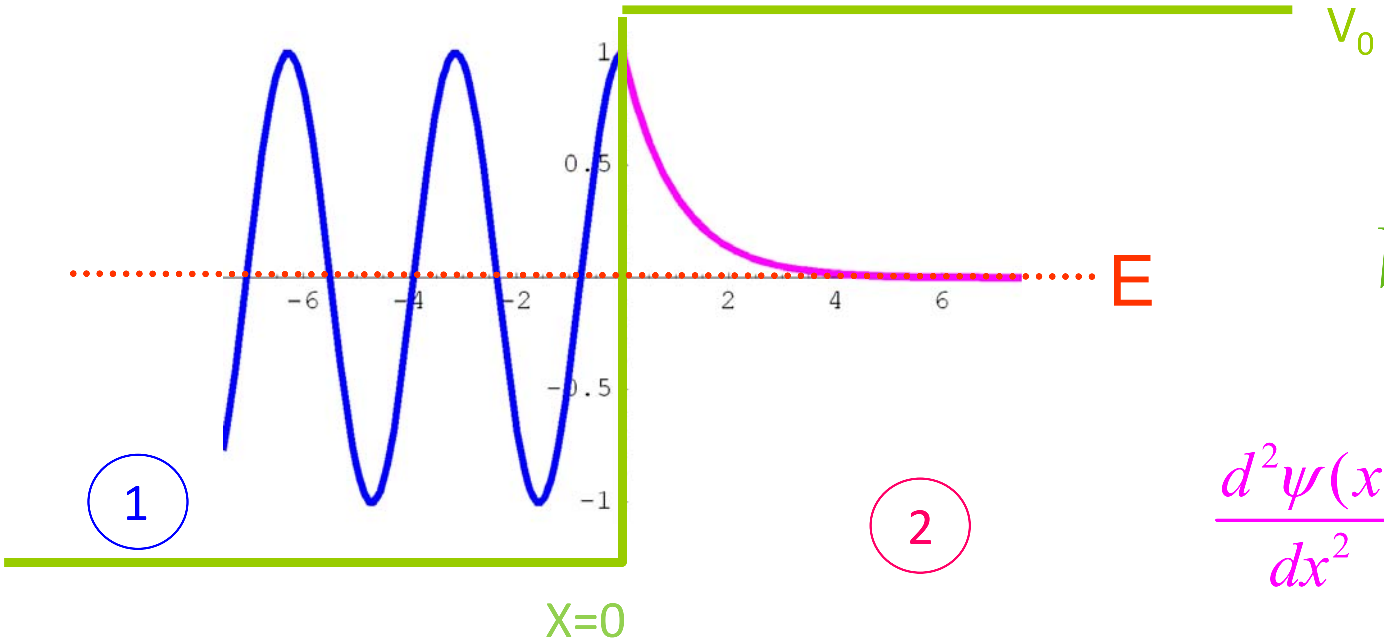
$$R=\frac{j_{ref}}{j_{incid}}=\frac{|B|^2}{|A|^2}=\left(\frac{1-k_2/k_1}{1+k_2/k_1}\right)^2$$

Коефициент на преминаване

$$T=\frac{j_{trans}}{j_{incid}}=\frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2}=\frac{4k_2/k_1}{(1+k_2/k_1)^2}$$

R + T = 1

Стъпков потенциал, $E<V_0$



$$V(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ V_0 & x>0\end{cases}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

$$\psi_1(x)=A.e^{ik_1x}+B.e^{-ik_1x}$$

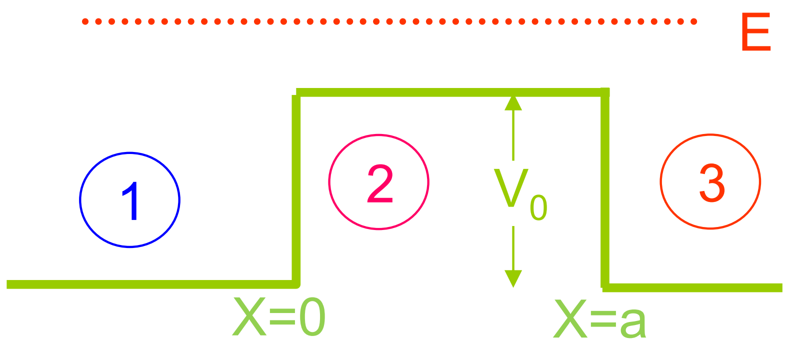
$$k_1=\sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\psi_2(x)=C.e^{k_2x}+D.e^{-k_2x}$$

$$k_2=\sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2}$$

$$\boxed{\psi_2 \xrightarrow{x\to\infty} \text{const} \implies C=0}$$

Правоъгълна бариера, E>V_0



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \le x \le a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

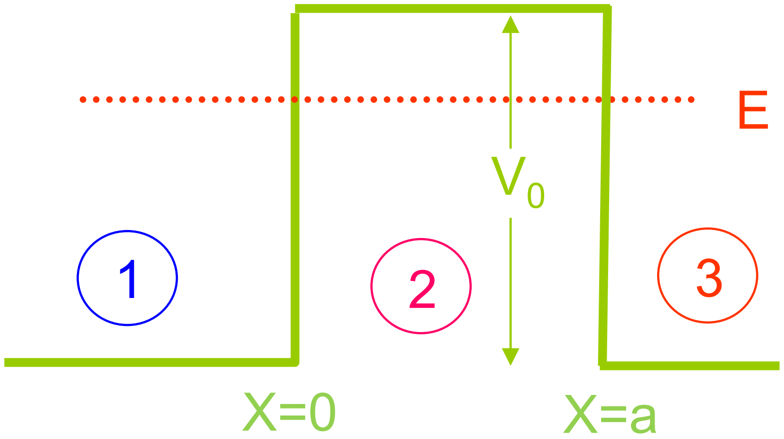
$$\psi_1(x) = A.e^{ik_1 x} + B.e^{-ik_1 x} \qquad \psi_2(x) = C.e^{ik_2 x} + D.e^{-ik_2 x} \qquad \psi_3(x) = F.e^{ik_1 x}$$

$$k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2} \qquad k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \qquad k_3 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{incid}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{E(E - V_0)}\sin^2(k_2 a)}$$

коефициент на преминаване

Правоъгълна бариера, $E<V_0$



$$V(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ V_0 & 0\le x\le a\\ 0 & x>a\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=A.e^{ik_1x}+B.e^{-ik_1x}$$

$$k_1=\sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\psi_2(x)=C.e^{k_2x}+D.e^{-k_2x}$$

$$k_2=\sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2}$$

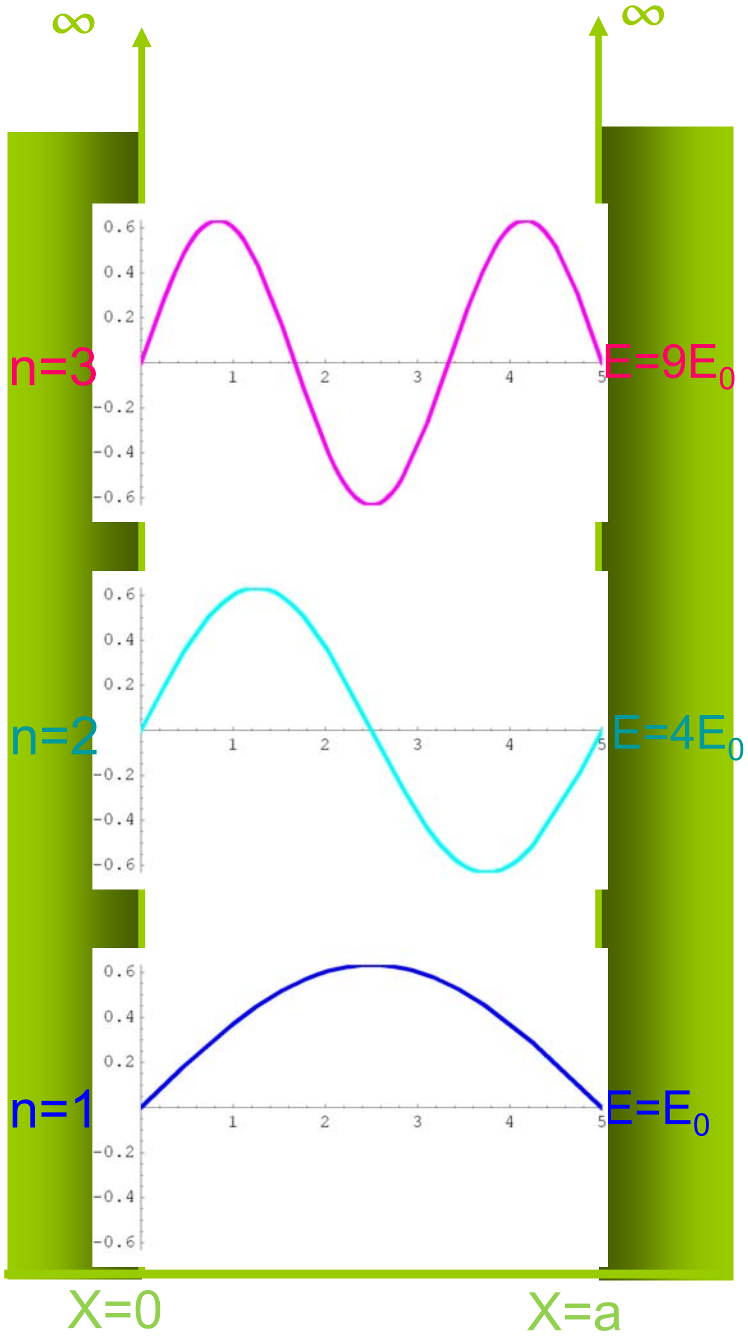
$$\psi_3(x)=F.e^{ik_1x}$$

$$k_3=\sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$T=\frac{j_{trans}}{j_{incid}}=\frac{|F|^2}{|A|^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{V_0^2}{E(V_0-E)}\sinh^2(k_2a)}$$

коефициент на тунелиране

Безкрайна потенциална яма



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, x > a \\ 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$\psi = A sin(kx) + B cos(kx) \qquad k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

Гранични условия:

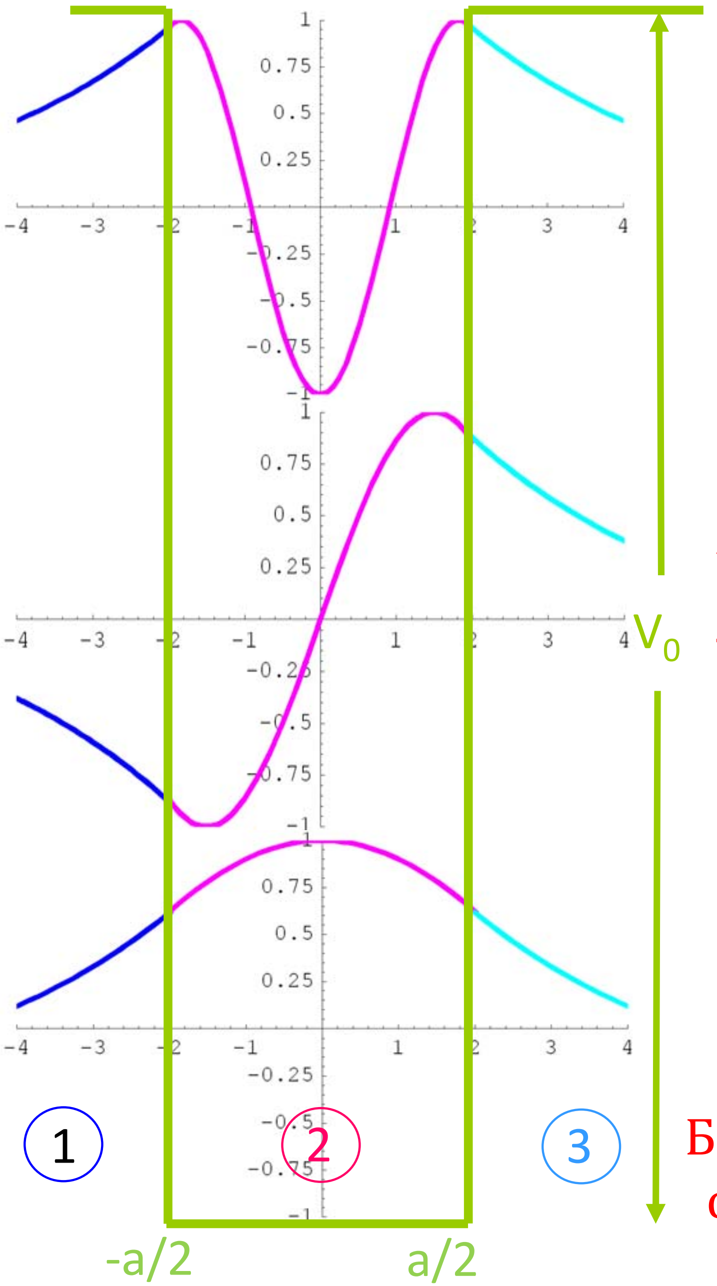
$$\begin{matrix} \psi(0) = 0 \\ \psi(a) = 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} B = 0 \\ ka = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix} \implies$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

$$A^2 \int_0^a (\sin(\frac{n\pi x}{a}))^2 dx = 1 \implies A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a})$$

Крайна потенциална яма



$$V(x)=\begin{cases}V_0 & |x|>a/2\\ 0 & |x|<a/2\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=A.e^{k_1x}\qquad k_1=\sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2}$$

$$\psi_3(x)=G.e^{-k_1x}$$

$$\psi_2(x)=C.e^{ik_2x}+D.e^{-ik_2x}\qquad k_2=\sqrt{2mE/\hbar^2}$$

Гранични условия:

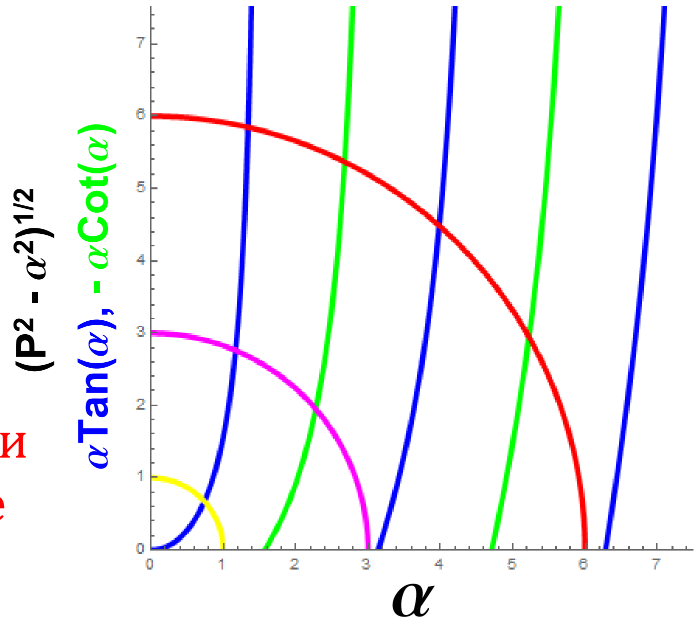
$$k_2\tan(k_2a/2)=k_1\qquad P^2=ma^2V_0/2\hbar^2\qquad \alpha.\tan(\alpha)=\sqrt{P^2-\alpha^2}$$

$$-k_2\cot(k_2a/2)=k_1\qquad \alpha=k_2a/2\qquad -\alpha.\cot(\alpha)=\sqrt{P^2-\alpha^2}$$

$0<P<\frac{\pi}{2}$ едно решение

$\frac{\pi}{2}<P<\pi$ две решения

....



Броя свързани решения зависи от само от характеристиките на потенциала.

Хармоничен осцилатор

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \ldots.. \qquad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \frac{m\omega^2}{2}x^2)\psi = 0$$

$$\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad \psi'' + (\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2)\psi = 0$$

Асимптотично решение

$$\xi^2 \gg 2E/\hbar\omega \qquad \psi_a'' = \xi^2\psi_a \qquad \psi_a \approx e^{-\xi^2/2}$$

Пълно решение

$$\psi = e^{-\xi^2/2}\chi(\xi) \qquad \chi'' - 2\xi\chi' + (\frac{2E}{\hbar\omega} - 1)\chi = 0$$

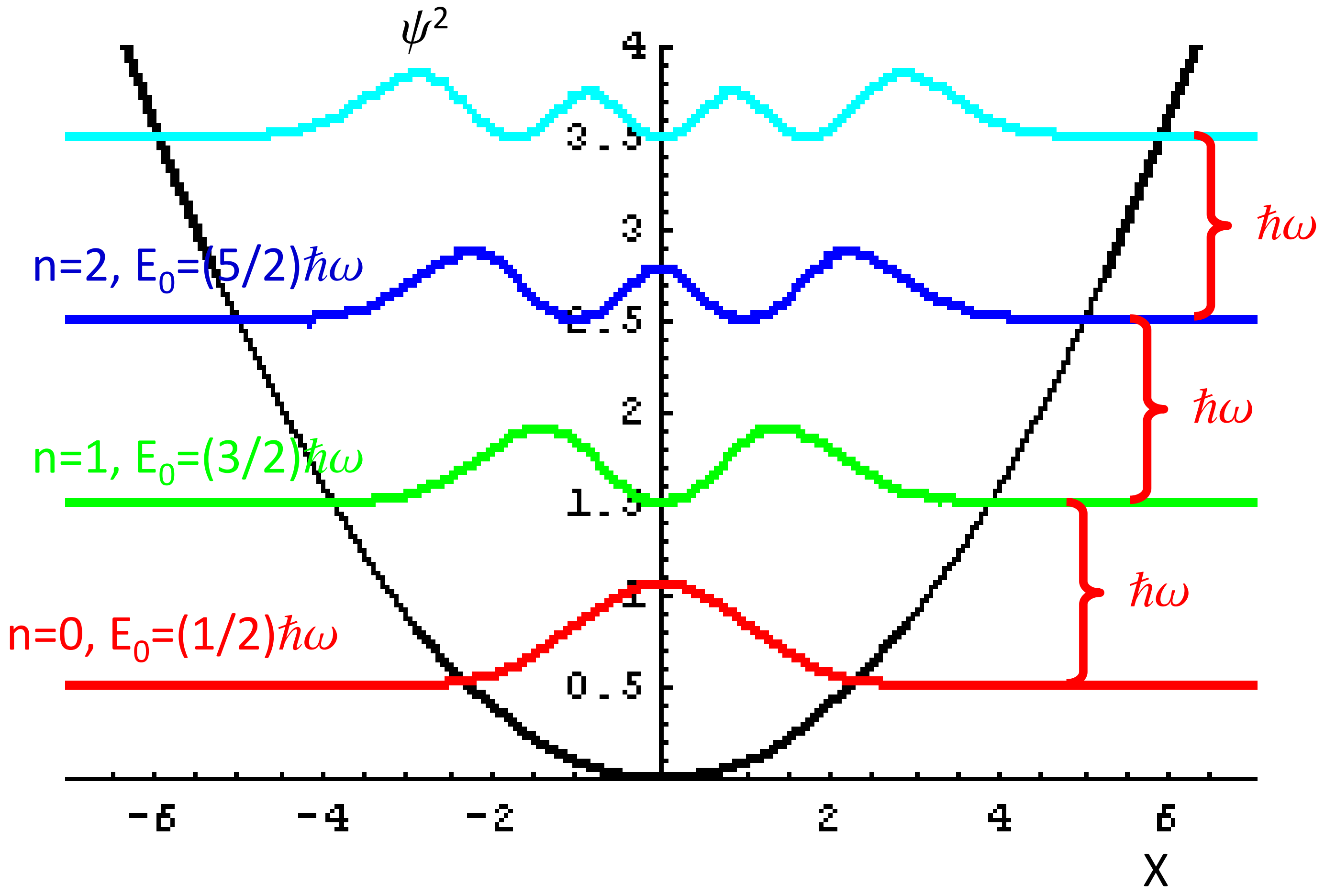
$$\chi'' - 2\xi\chi' + 2n\chi = 0 \qquad E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2} \qquad \psi_n(x) = NH_n(\alpha x)e^{-(\alpha^2x^2)/2} \qquad \alpha^2 = \sqrt{km}/\hbar$$

$$\int \psi_n{}^2 dx = 1 \qquad N = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

Хармоничен осцилатор

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$



$$H_2 = (4\alpha^2 x^2 - 2)$$

$$\psi_2 = 2^{-3/2}\alpha^{1/2}\pi^{-1/4}(4\alpha^2 x^2 - 2)\mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2/2}$$

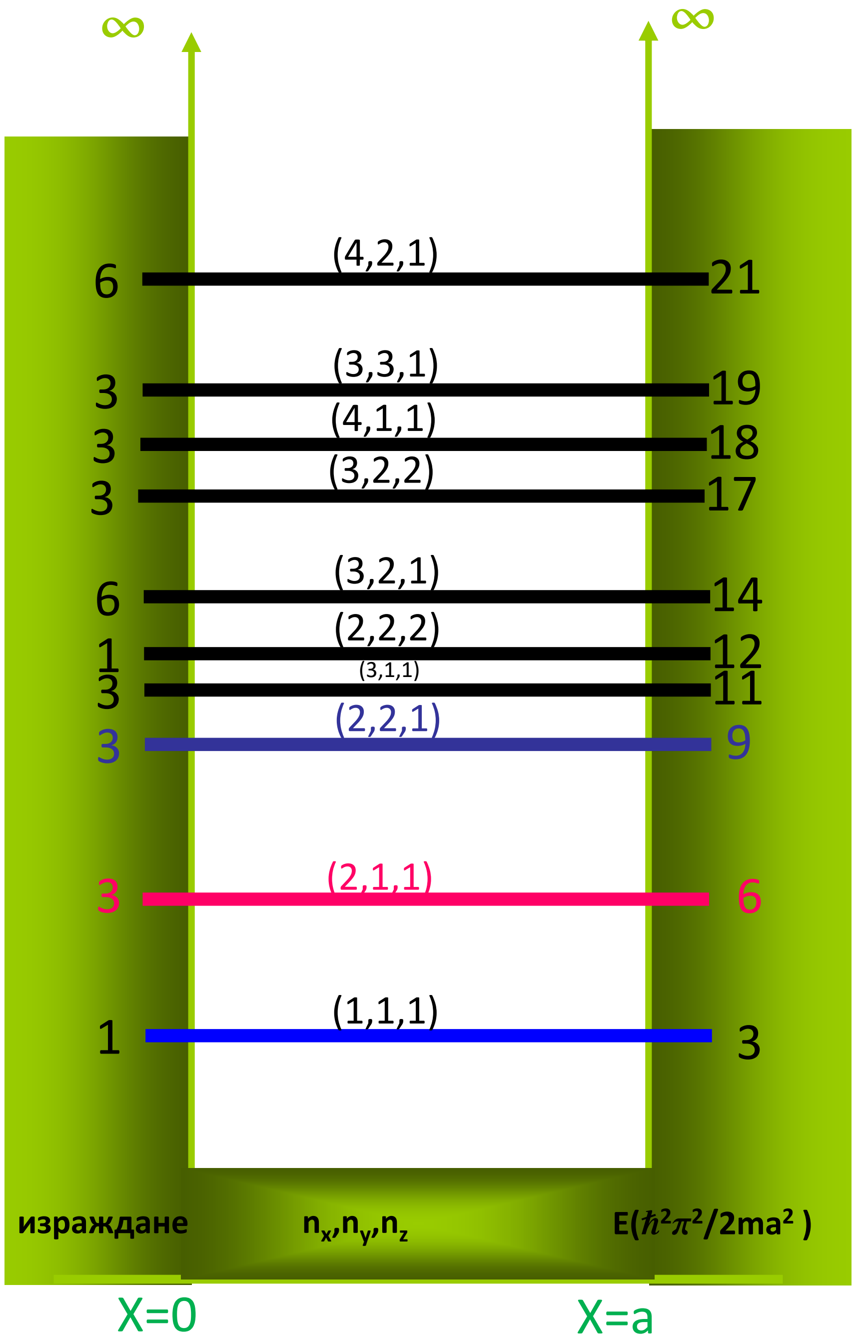
$$H_1 = 2\alpha x$$

$$\psi_1 = 2^{-1/2}\alpha^{1/2}\pi^{-1/4}(2\alpha x)\mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2/2}$$

$$H_0 = 1$$

$$\psi_0 = \alpha^{1/2}\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2/2}$$

Безкрайна потенциална яма – 3D



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x, y, z < 0, x, y, z > a \\ 0 & 0 \le x, y, z \le a \end{cases}$$

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z} = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^3} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{a}\right)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$n_x, n_y, n_z = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Основно състояние

$n_x = 1 \quad n_y = 1 \quad n_z = 1 \quad \Longrightarrow \quad E_{2,1,1} = \dfrac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

Първо възбудено

$$\left.\begin{matrix} n_x = 2 & n_y = 1 & n_z = 1 \\ n_x = 1 & n_y = 2 & n_z = 1 \\ n_x = 1 & n_y = 1 & n_z = 2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow E_{2,1,1} = \frac{6\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

Второ възбудено

$$\left.\begin{matrix} n_x = 2 & n_y = 2 & n_z = 1 \\ n_x = 1 & n_y = 2 & n_z = 2 \\ n_x = 2 & n_y = 1 & n_z = 2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow E_{2,2,1} = \frac{9\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

Централен потенциал

$$V(\vec{r}) \equiv V(r,\theta,\varphi) = V(r)$$

Сферични координати: {x,y,z} $\Longrightarrow$ {r.cos(φ)sin(θ), r.sin(φ)sin(θ), r.cos(θ)}

l^2 е интеграл на движението, т.е. $\boxed{[H,l^2]=0}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar\hat{\vec{r}} \times \nabla$$

$$-i\hbar\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix}$$

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z$$

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$$

$$[l^2, l_i] = 0$$

$$\vec{r}.\vec{p} = -i\hbar r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$l^2 = (\vec{r}\times\vec{p}).(\vec{r}\times\vec{p}) = r^2p^2 - \vec{r}(\vec{r}.\vec{p}).\vec{p} + 2i\hbar\vec{r}.\vec{p} = r^2p^2 + \hbar^2r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hbar^2 2r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$l^2 = r^2p^2 + \hbar\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)]\psi = E\psi$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\psi = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$l^2\psi = \hbar^2\lambda\psi$$

$$l^2 = \hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

Централен потенциал – ъглова част

$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\psi=\lambda\psi$$

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0$$

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\quad m=0,\pm1,\pm2$$

$$\lambda=l(l+1)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+[\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\Theta=0$$

$$\Theta_{lm}(\theta)=[\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}]^{1/2}P_l^m(cos(\theta))$$

$$l=0,1,2,\ldots\ m=0,\pm1,\pm2\ldots.$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^m\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}[\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}]^{1/2}P_l^m(cos\theta)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{l}^2Y_{lm}(\theta,\varphi)=\hbar^2l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)\\ \hat{l}_zY_{lm}(\theta,\varphi)=\hbar mY_{lm}(\theta,\varphi)\end{array}}$$

$$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

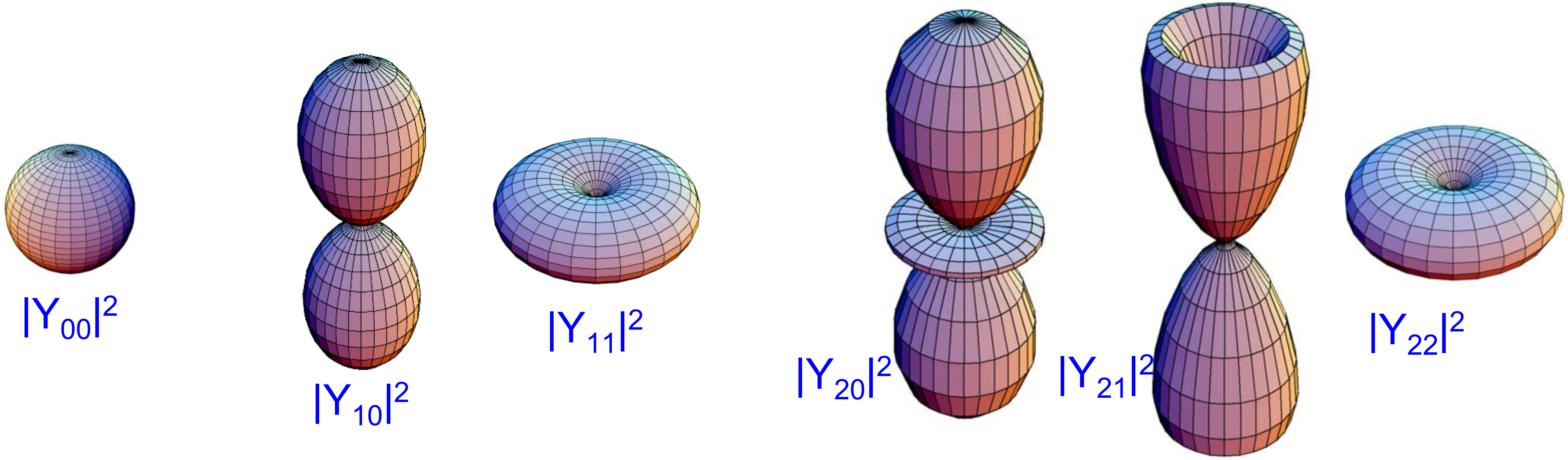
$$Y_{1-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\varphi}\sin(\theta)\qquad Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)\qquad Y_{1+1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{+i\varphi}\sin(\theta)$$

$$Y_{2-1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{-i\varphi}\cos(\theta)\sin(\theta)\qquad Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2(\theta)-1)\qquad Y_{2+1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\varphi}\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$Y_{2-2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{-2i\varphi}\sin^2(\theta)\qquad Y_{2+2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{-2i\varphi}\sin^2(\theta)$$

За всяка стойност на орбиталното квантово число *(l)* съществуват ***2l+1*** решения свързани с магнитното квантово число (m_l)

Плътност, определена от ъгловата част



• За всеки централен потенциал големината на орбилталния ъглов момент е добро квантово число: $\langle l^2 \rangle = \hbar^2\, l(l+1),\ l=0, 1, 2, \ldots.$

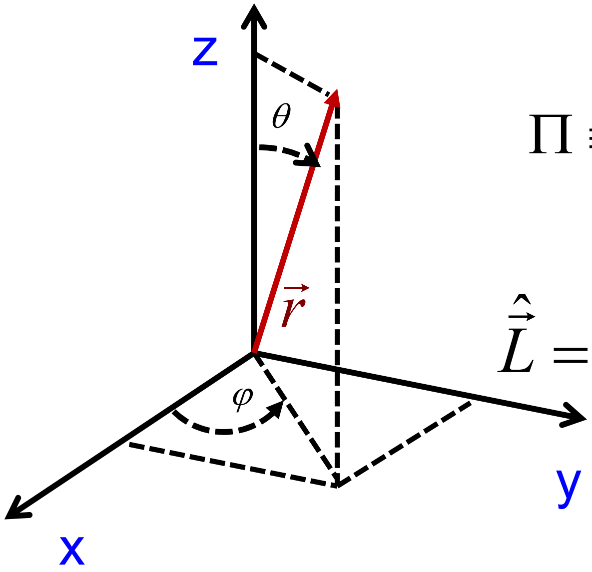
Спектрометрични означения

l	0	1	2	3	4	5	6
символ	s	p	d	f	g	h	i

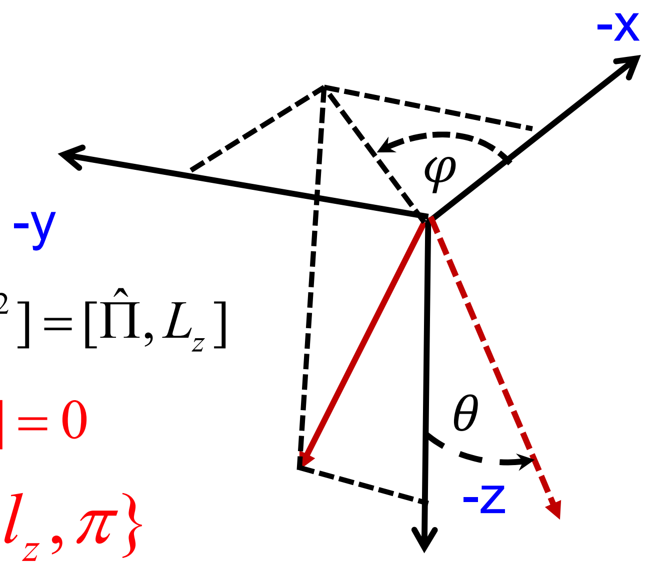
• Възможно е да познаваме само една от компонентите на орбиталния ъглов момент

$$l_z = \hbar m_l,\ m_l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots.\pm l$$

Орбитален ъглов момент и пространствено отражение



$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} x \to -x \\ y \to -y \\ z \to -z \end{pmatrix} \qquad \Pi \equiv \begin{pmatrix} r \to r \\ \theta \to \pi - \theta \\ \varphi \to \pi + \varphi \end{pmatrix}$$



$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar\hat{\vec{r}} \times \nabla \qquad [\hat{\Pi}, \hat{p}^2] = [\hat{\Pi}, \hat{\vec{L}}] = [\hat{\Pi}, \hat{L}^2] = [\hat{\Pi}, L_z]$$

$$V(\vec{r}) = V(-\vec{r}) \qquad [\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0$$

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi(-\vec{r})|^2 \qquad \{E, n, l, l_z, \pi\}$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^m \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos(\theta))$$

$$e^{im\varphi} \to e^{im(\varphi+\pi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$$

$$\theta \to \pi - \theta: \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\boxed{\hat{\Pi} Y_{lm}(\theta,\varphi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y(\theta,\phi)}$$

$$P_l^m(-z) = (-1)^{l-m} P_l^m(z)$$

$$\hat{\Pi}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \pi\Psi(\vec{r})$$

$$\hat{\Pi}^2\Psi(\vec{r}) = \hat{\Pi}\Psi(-\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) = \pi^2\Psi(\vec{r}) \qquad \pi = \pm$$

Пълен ъглов момент

Нуклеоните (протони и неутрони) вътрешен спин 1/2

$$\langle s^2 \rangle = \hbar^2 s(s+1)$$

$$\langle s_z \rangle = \hbar m_s \qquad m_s = \pm 1/2$$

$$\vec{j} = \vec{s} + \vec{l}$$

$$\langle j^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

$$\langle j_z \rangle = \hbar m_j \qquad m_j = -j, -j+1 \ldots. j-1, j$$

$$m_j = m_l + m_s = m_l \pm 1/2$$

$$j = l \pm 1/2$$

$$m_j = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2 \ldots$$

Означения: $\boxed{\boldsymbol{n}\ \ell_{\,j}}$

$1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$, $1d_{3/2}$, $2s_{1/2}$, $1f_{7/2}$, $1f_{5/2}$, $2p_{3/2}$, $2p_{1/2}$, $1g_{9/2}$, $2d_{5/2}$

Централен потенциал – радиална част

$$[-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\hat{l}^2}{2mr^2}+V(r)]\Psi = E\Psi$$

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}+V(r)\right)R=ER}$$

Алтернативен подход

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(V(r)-E)\right)\Psi=0$$

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi)R(r)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}(V(r)-E)R-AR=0$$

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+AY=0$$

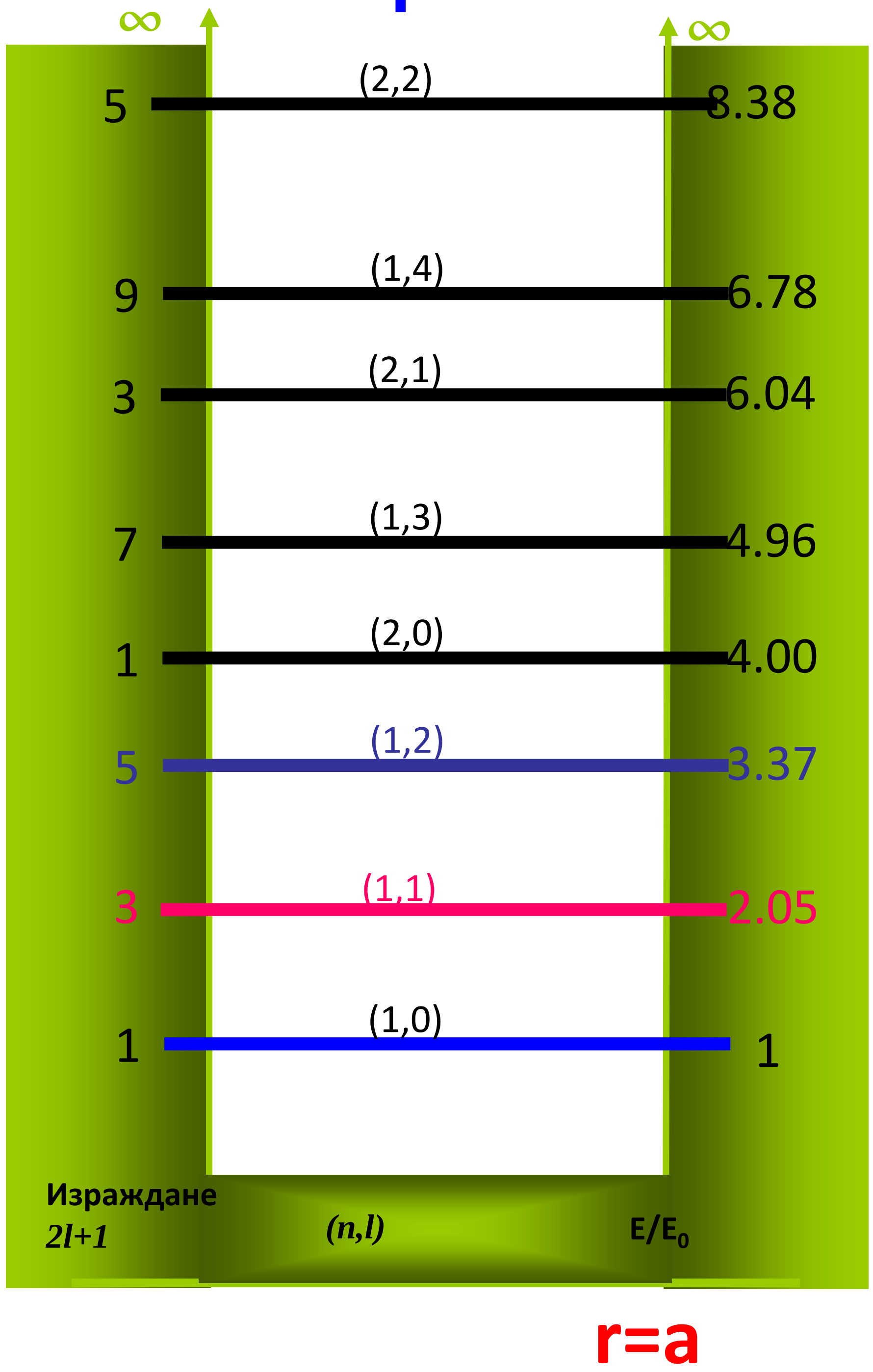
$$A=l(l+1)$$

$$B=m^2$$

$$\frac{1}{sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{B}{sin^2(\theta)}+A\Theta=0$$

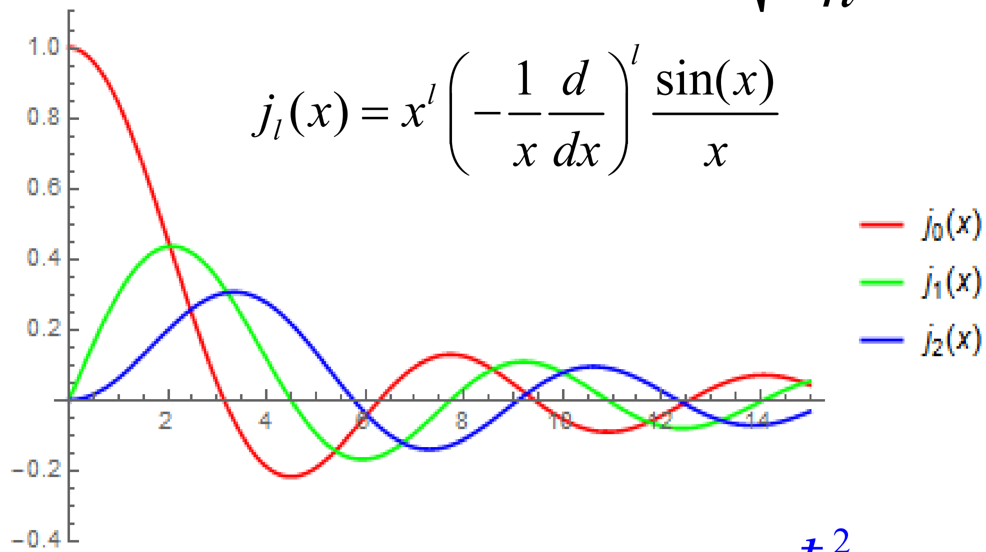
$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+B\Phi=0$$

Безкрайна потенциална яма – 3D



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}+V(r)\right)R=ER$$

$$R_l(r)=N_l j_l(kr) \qquad k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$



$$j_l(x)=x^l\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\frac{\sin(x)}{x}$$

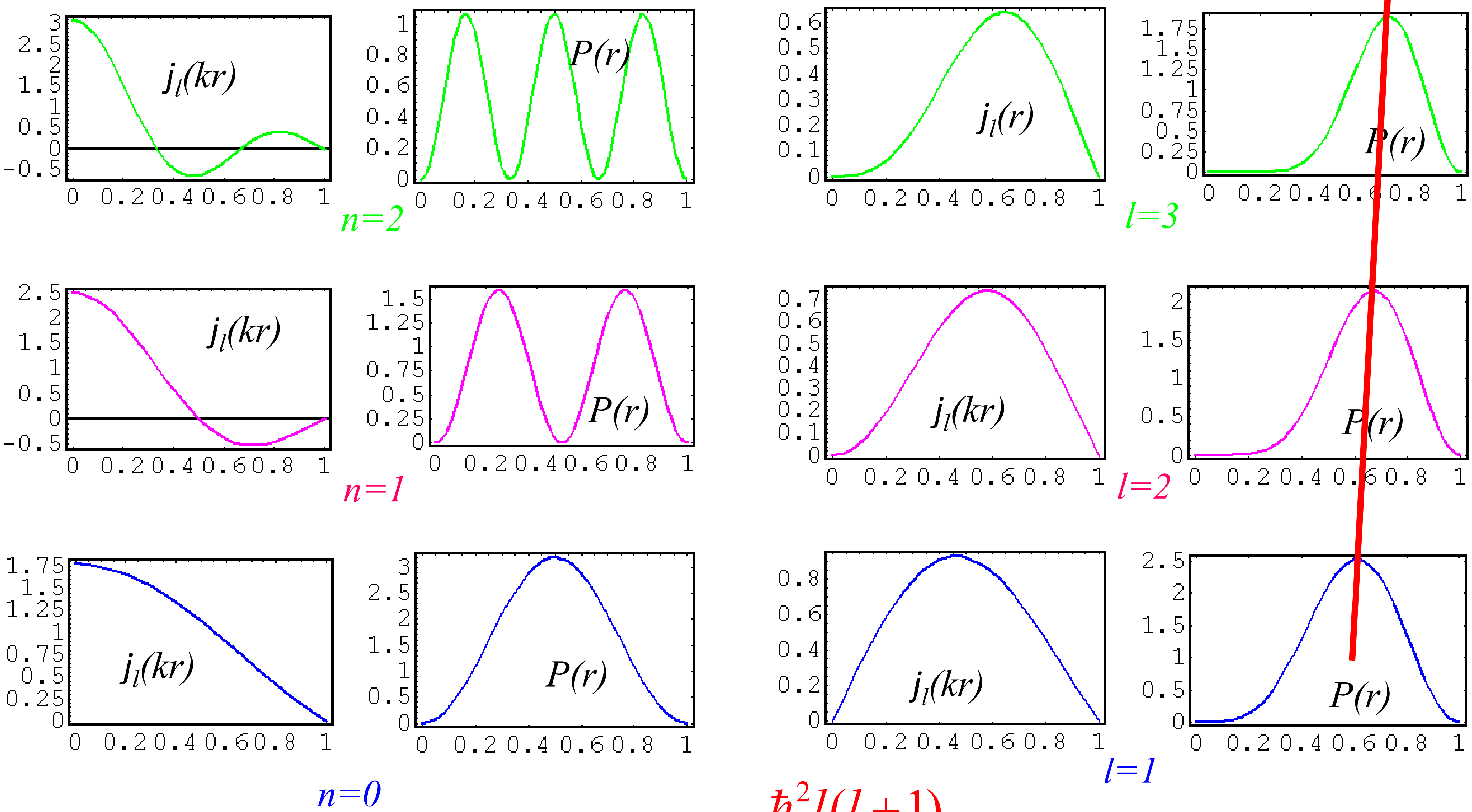
$$j_l(ka)=\ 0 \ \Rightarrow\ \{\xi_n^l\}\ \Rightarrow\ E_{nl}=\frac{\hbar^2}{2ma^2}(\xi_n^l)^2$$

n		1	2	4
$l=0$	$\{\xi_n^0=\}$	3.14	6.28	9.42
$l=1$	$\{\xi_n^1=\}$	4.49	7.72	10.90
$l=2$	$\{\xi_n^2=\}$	5.76	9.09	12.32

$2l+1$ израждане по m_l

Центробежен потенциал

$$P(r)dr = \int |\Psi|^2 \, d\upsilon = r^2 |R(r)|^2 \, dr \int \sin(\theta) d\theta \int |Y_{lm}|^2 \, d\varphi = r^2 |R(r)|^2 \, dr$$



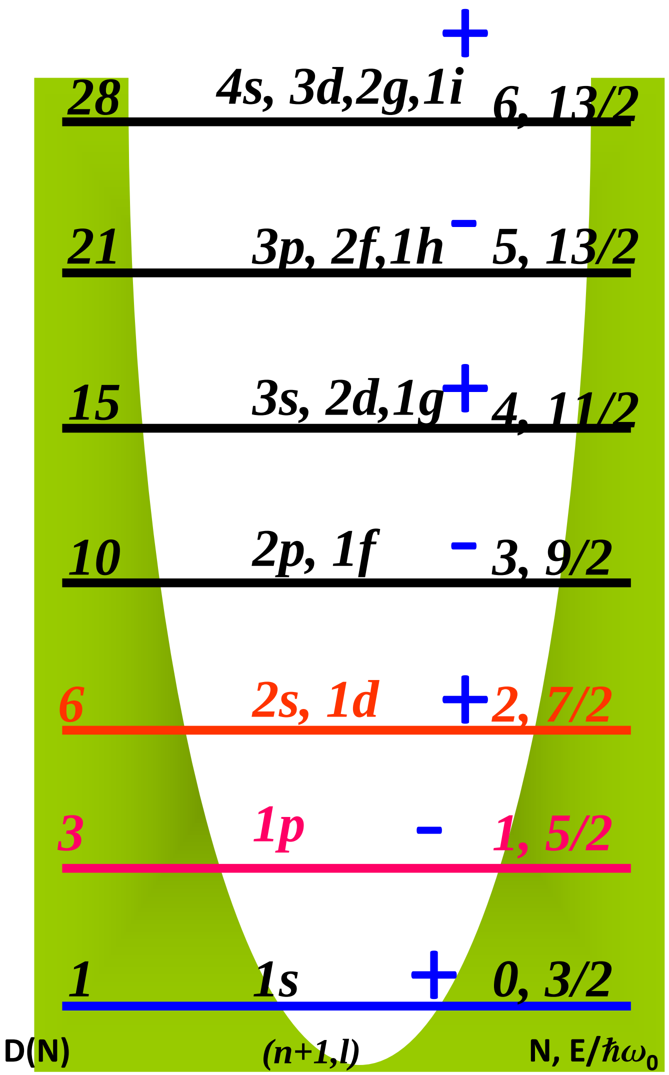
l=0 - const

$$V_{eff} = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

n=0 - const

Сферичен хармоничен осцилатор

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$$



$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega_0^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = E R$$

$$R \propto F\left(-n, l + \frac{3}{2}; \frac{m\omega_0}{\hbar^2} r^2\right)$$

$$\boxed{E_{nl} = \hbar\omega_0\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega_0\left(N + \frac{3}{2}\right)}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ \ldots$ – радиално квантово число

N – главно квантово число – осцилаторен слой;

N – четно (нечетно) $\Longrightarrow$ l четно (нечетно) 0(1), 2(3)...N

$\Longrightarrow$ N определя четността на състоянията в него

за дадено l имаме $(2l + 1)$ израждане по m_l

$\Longrightarrow$ пълното израждане за дадено квантово число N

$$D(N) = \sum_{l=0,1}^{N} (2l+1) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

Квантова статистика

Атомното ядро е изградено от голям брой частици от два типа (протони и неутрони), които обаче са неразличими помежду си.

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \qquad A, B$$

$$\Psi = \psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) \qquad \Psi = \psi_B(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)$$

Плътността на вероятността ($|\Psi|^2$) за система от неразличими частици трябва да е инвариантна по отношение на размяната на всеки две частици.

$$\Psi = \Psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) \pm \psi_B(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \psi_A(\vec{r}_1) & \psi_A(\vec{r}_2) \\ \psi_B(\vec{r}_1) & \psi_B(\vec{r}_2) \end{vmatrix}$$

$\Psi_{12} = \Psi_{21}$ $\qquad 0, 1, 2, ...$ Бозе

$\Psi_{12} = -\Psi_{21}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ...$ Ферми

$p, n: \quad \frac{1}{2}$

Случай на повече от две части

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{A}}\begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(A) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_A(1) & \varphi_A(2) & \dots & \varphi_A(A) \end{vmatrix}$$

Детерминанта на Слейтър

Вероятността два фермиона да се намират едновременно в едно също квантово състояние винаги е 0!

Преходи между квантови състояния

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r})]\Psi(\vec{r},t)\equiv\hat{H}(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) \qquad \psi_n=\varphi_n(\vec{r})e^{-iE_nt/\hbar}$$

$$\Delta E\Delta t\geq\hbar/2 \qquad \Delta E=\sqrt{\left\langle E^2\right\rangle-\left\langle E\right\rangle^2} \qquad \begin{aligned}\left\langle E^2\right\rangle&=\left\langle\psi\,|\,H^2\,|\,\psi\right\rangle\\ \left\langle E\right\rangle^2&=\left\langle\psi\,|\,H\,|\,\psi\right\rangle^2\end{aligned} \qquad \Delta t=\infty$$

$$U(\vec{r})+V'(t) \qquad \psi_i\rightarrow\psi_f \qquad E_r=E_i-E_f$$

$$\Delta E=\Gamma\neq 0 \qquad \tau\simeq\hbar/\Gamma$$

естествена ширина на линията

$$\lambda=\frac{1}{\tau} \qquad \lambda=\frac{2\pi}{\hbar}|V'_{fi}|^2\rho(E_f)$$

Златно правило на Ферми

$$V_{fi}'=\left\langle\psi_f\,|\,\widehat{V}_{fi}\,|\,\psi_i\right\rangle=\int\psi_f{}^*\widehat{V}'_{fi}\psi dv$$

Матричен елемент на прехода!

- V_{nl} не зависи от енергията на крайните състояния;
- $\rho(E_n)$ зависи слабо от честота на прехода, т.е. имаме множество крайни състояния със близки енергии;

Вероятност за преход между квантови състояния

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=H\Psi(\vec{r},t)$$

$$H=H_0+\lambda V(x,t)$$

$$\lambda\in(0,1)$$

$$V(x,t)=\begin{cases}V(x) & t>0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^0(x)=H_0\Psi^0(x)$$

$$H_0\psi_n^0(x)=E_n^0\psi_n(x)$$

$$\Psi^0(x,t)=\sum_n c_n\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$$

Допускане на Дирак (метод на вариация на постоянните):

$$\Psi(x,t)=\sum_n c_n(t)\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$$

$$i\hbar\sum_n\frac{dc_n(t)}{dt}\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}+\cancel{i\hbar\sum_n c_n(t)\psi_n^0(x)(-\frac{i}{\hbar}E_n^0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}}=(H_0+\lambda V(t))\sum_n c_n(t)\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$$

$$=\cancel{\sum_n c_n(t)E_n^0\psi_n^0(x)E_n^0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}}+\lambda\sum_n c_n(t)V(t)\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$$

$$i\hbar\sum_n\frac{dc_n(t)}{dt}\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}=\lambda\sum_n c_n(t)V(t)\psi_n^0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$$

Вероятност за преход между квантови състояния

$$\psi_m^0 \cdot | \qquad i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n^0(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t} = \lambda \sum_n c_n(t) V(t) \psi_n^0(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t} \qquad \psi_n^0(x).\psi_m^0(x) = \delta_{nm}$$

$$ih \frac{dc_m(t)}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} = \lambda \sum_n c_n(t) \psi_m^0(x) V(t) \psi_n^0(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t} \qquad i\hbar \frac{dc_m(t)}{dt} = \lambda \sum_n c_n(t) \psi_m^0(x) V(t) \psi_n^0(x) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n^0 - E_m^0)t}$$

$V_{nm} = \psi_m^0(x) \hat{V} \psi_n^0(x)$ - матричен елемент на прехода $\qquad \omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}(E_m^0 - E_n^0)$

$$\frac{dc_m(t)}{dt} = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_n c_n(t) V_{nm} e^{i\omega_{nm} t} \qquad c_n(t) = c_n^0(t) + \lambda c_n^1(t) + \lambda^2 c_n^2(t) + \ldots.. \qquad \Psi(x,t) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \Psi^0(x)$$

$$\frac{dc_m^0(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow c_m^0(t) = const = c_m$$

$$\frac{dc_m^1(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n c_n^0(t) V_{nm} e^{i\omega_{nm} t} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n c_n V_{nm} e^{i\omega_{nm} t}$$

$$\frac{dc_m^2(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n c_n^1(t) V_{nm} e^{i\omega_{nm} t}$$

....

Вероятност за преход между квантови състояния

$$\frac{dc_m^0(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow c_m^0(t) = const = c_m$$

$$\frac{dc_m^1(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n c_n^0(t) V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n c_n V_{nm} e^{i\omega_{nm}t}$$

С точност до първи порядък задачата се свежда до намиране на коефициентите $\{c^1_m\}$

Какъв е техният физически смисъл?

Нека при t_0 системата да е в стационарно състояние с енергия $E^0_\ell \Rightarrow c_n = \delta_{n\ell}$

$$\frac{dc_{nl}^1(t)}{dt} = V_{nl} e^{i\omega_{nl}t} \qquad \Psi(x,t) = \sum_n c_{nl}^1(t)\psi_n^0(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^0 t}$$

$|c_{nl}^1(t)|^2$

вероятност в момента $t>t_0$ с-мата да е в състояние $\{E_n, \psi^0_n\}$

$$t_0 : \{E_l, \psi_l\} \longrightarrow t : \{E_n, \psi_n\}$$

$$1 \qquad\qquad |c_{nl}^1(t)|^2$$

$|c_{nl}^1(t)|^2 = P_{nl}$ вероятност за проход $\ell \rightarrow n$

$$c_{nl}^1 = \frac{1}{i\hbar} V_{nl} \int_{t_0=0}^{t} e^{i\omega_{nl}t'} dt' = -\frac{V_{nl}}{\hbar\omega_{nl}}\left(e^{i\omega_{nl}t} - 1\right)$$

$$|c_{nl}^1(t)|^2 = \frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2\omega_{nl}^2}|e^{i\omega_{nl}t} - 1|^2 = \frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2\omega_{nl}^2} 2(1-\cos(\omega_{nl}t)) = \frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2(\omega_{nl}/2)^2}\sin^2(\frac{\omega_{nl}t}{2})$$

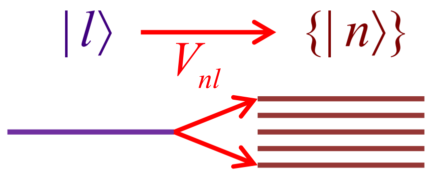
Вероятност за преход между квантови състояния

$$P_{nl} = |c_{nl}^1|^2 = \frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2(\omega_{nl}/2)^2}\sin^2\left(\frac{\omega_{nl}t}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(ax)}{a^2x} = \pi\delta(a) \qquad \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$$

$$\omega_{nm} = (E_m^0 - E_n^0)/\hbar$$

$$\lambda_{nl} = \lim_{t\to\infty}\frac{|c_{nl}^1|^2}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{nl}}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_{nl}}{2}\right)^2 t} = \frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2}\pi\delta\left(\frac{E_n^0 - E_l^0}{2\hbar}\right) = \frac{2\pi|V_{nl}|^2}{\hbar}\delta(E_n^0 - E_l^0)$$



Енергетична плътност на крайните състояния

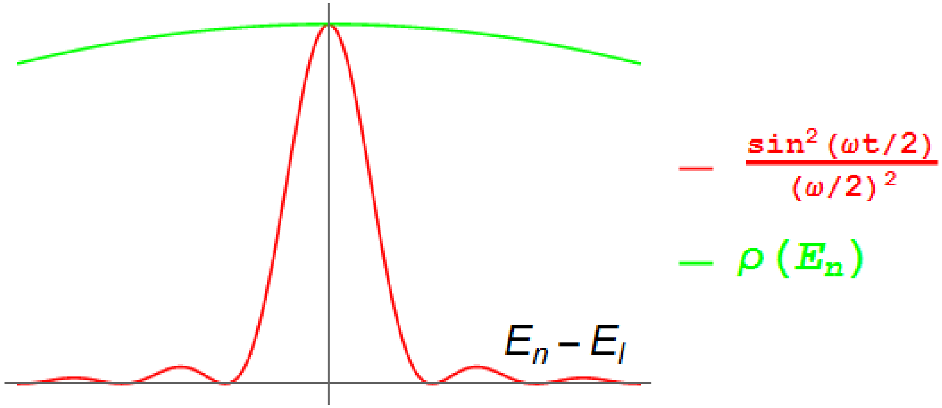
$$P_l = \int \rho(E_n) P_{nl}\, dE_n = \int \rho(E_n)\frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\left(\frac{(E_n - E_l^0)}{2\hbar}t\right)}{\left(\frac{(E_n - E_l^0)}{2\hbar}\right)^2} dE_n$$

Златно правило на Ферми

$$P_l = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(E_n) \frac{|V_{nl}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{E_n - E_l^0}{2\hbar} t\right)}{\left(\frac{(E_n - E_l^0)}{2\hbar}\right)^2} dE_n$$

- V_{nl} не зависи от енергията на крайните състояния;
- $\rho(E_n)$ зависи слабо от честота на прехода, т.е. имаме множество крайни състояния със близки енергии;

времето за наблюдение t дълго спрямо $2\pi/\omega$



$$P_l = 4\rho(E_n) |V_{nl}|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2\hbar}(E_n - E_l^0)\right)}{\left(E_n - E_l^0\right)^2} dE_n$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx = a\pi$$

$$P_l = \rho(E_n) |V_{nl}|^2 \frac{2\pi}{\hbar} t$$

$$\boxed{\lambda = \frac{P_l}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_n) |V_{nl}|^2}$$

$$V_{nm} = \psi_m^0(x) \hat{V} \psi_n^0(x) \qquad V_{fi} = \sum \psi_f^0 \hat{V} \psi_i^0 = \int \psi_f^0 \hat{V} \psi_i^0 d\upsilon$$